

## ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ

*Савелькаев С.В.*

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск*

**Ключевые слова:** трехмассовая механическая система типа инерциоид, диссипативная среда, уравнения движения, эффект смешения центра масс.

**Аннотация.** В статье рассмотрена трехмассовая механическая система, типа инерциоид, содержащая опорное тело с массой  $m_1$ , находящееся в диссипативной среде, и два рабочих тела с массами  $m_2$ . Рабочие тела  $m_2$  шарнирно установлены на опорном теле  $m_1$  с помощью прямолинейных идеальных стержней, имеющих длину  $R$ , с возможностью встречного вращательного движения рабочих тел  $m_2$  в плоскости опорного тела  $m_1$ . Проведен динамический анализ этой трехмассовой механической системы для времени ее действия и последействия с ее заменой на эквивалентную двухмассовую. Показано, что смещение центра масс трехмассовой механической системы для любых фиксированных встречных поворотов ее рабочих тел  $m_2$  на угол  $0 < \varphi_{21} \leq \pi$  для любого уровня диссипации внешней среды остается постоянным и зависит только от собственных параметров этой механической системы. При нулевом уровне диссипации смещение центра масс становится невозможным. Эффект независимости от диссипации позволяет разработать устройства, обеспечивающие направленное дискретное перемещения в среде с малой диссипацией (жидкие и твердые скользкие поверхности) с разрушением объектов, препятствующих этому перемещению.

## DYNAMIC ANALYSIS OF THREE-MASS MECHANICAL SYSTEMS IN A DISSIPATIVE ENVIRONMENT ACCOUNTING FORCES OF INERTIA

*Savel'kaev S.V.*

*Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk*

**Keywords:** three-mass mechanical system of inertial type, dissipative medium, equations of motion, center of mass mixing effect.

**Abstract.** The article considers a three-mass mechanical system, of the inertial type, containing a support body with mass  $m_1$ , located in a dissipative medium, and two working bodies with masses  $m_2$ . The working bodies  $m_2$  are hinged on the supporting body  $m_1$  using straight ideal rods having a length  $R$ , with the possibility of counter rotational movement of the working bodies  $m_2$  in the plane of the supporting body  $m_1$ . A dynamic analysis of this three-mass mechanical system was carried out for the time of its action and aftereffect with its replacement by an equivalent two-mass system. It is shown that the displacement of the center of mass of a three-mass mechanical system for any fixed counter rotations of its working bodies  $m_2$  by an angle  $0 < \varphi_{21} \leq \pi$  for any level of dissipation of the external environment remains constant and depends only on the intrinsic parameters of this mechanical system. At zero dissipation level, displacement of the center of mass becomes impossible. The effect of independence from dissipation makes it possible to develop devices that provide directed discrete movements in an environment with low dissipation (liquid and solid slippery surfaces) with the destruction of objects that impede this movement.

Рассмотрим трехмассовую механическую систему (МСЗ) типа инерциоид Толчина [1], показанную на рисунке 1.

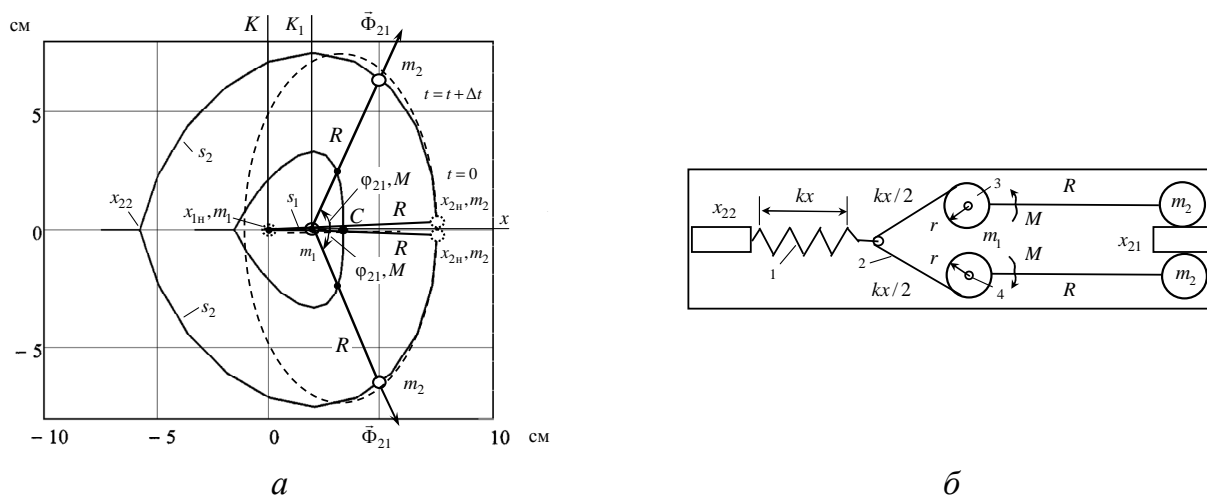


Рис. 1. Трехмассовая механическая система – *а* и ее конструкция – *б*: 1 – пружина с жесткостью  $k$ ; 2 – нерастяжимая нить; 3 – шкив радиусом  $r$ ; 4 – ось шарнира

Она снабжена двумя рабочими (ускоряемыми) телами с равными массами  $m_2$  (рис. 1, *а*). Эти тела посредством прямолинейных идеальных стержней с длиной  $R$  шарнирно закреплены на опорном (ускоряющем) теле, имеющем массу  $m_1$ , с возможностью их вращательного перемещения в его плоскости. В момент времени  $t = 0$  опорное тело  $m_1$  находится в положении  $x_{1н}$ , а рабочие тела  $m_2$  – в положении  $x_{2н}$  и имеют нулевые начальные скорости  $x_{1н}, x_{2н} = 0$ . Коэффициент сопротивления диссипативной среды движению опорного тела  $m_1$  составляет  $\mu_1$ . Он зависит от геометрической формы и размеров этого тела. Для рабочих тел  $m_2$  он составляет  $\mu_2 = 0$ .

Для проведения динамического анализа МСЗ введем неподвижную систему отсчета  $K$ , начало координат которой свяжем с начальным положением  $x_{1н}$  опорного тела  $m_1$  в момент времени  $t = 0$ , а также собственную систему  $K_1$  опорного тела  $m_1$ , которая вместе с ним может совершать прямолинейное поступательное движение вдоль оси  $x$  системы отсчета  $K$ . Рабочие тела  $m_2$  при  $t + \Delta t$  совершают в системе отсчета  $K_1$  встречное вращательное движение в плоскости опорного тела  $m_1$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$  (где знак «+» для верхнего и «-» для нижнего рабочих тел  $m_1, m_2$ ) из их начального положения  $x_{2н}$  (из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  в системе отсчета  $K_1$ ) (рис. 1, *б*). Траекторией движения тел  $m_2$  в системе отсчета  $K$  при  $\mu_1 = 0$  является эллипс (показан на рис. 1, *а* пунктиром), а при  $\mu_1 \neq 0$  их траектории движения  $s_2$  показаны сплошными линиями.

Угловая скорость  $\omega_{21}$  поддерживается постоянной  $\pm\omega_{21} = \text{const}$  внутренним двунаправленным уравновешенным моментом  $M = \pm \frac{1}{2} r k x$  (рис. 1, *б*). Его создает пружина 1 жесткостью  $k$  посредством нити 2, намотанной на шарнирные шкивы 3 радиусом  $r$ , на которых закреплены стержни  $R$ , где  $x = r(\pi - \varphi_{21})$  – величина растяжения пружины 1 в зависимости от угла  $\varphi_{21}$  поворота рабочих тел  $m_1$ . Жесткость  $k$  пружины 1 выбрана так, чтобы время поворота тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \pm\pi$  для любых  $\mu_1$  и параметров МСЗ составляло  $t_1 = 0.5$  с.

Выразим кинетическую энергию МСЗ через сумму кинетических энергий ее двух зеркальных относительно  $x$  частей с массами  $\frac{1}{2}m_1$  и  $m_2$ . Для этого выразим координаты и скорости тел  $\frac{1}{2}m_1$  и  $m_2$  этих частей в системе отсчета  $K$  в виде:

$$\begin{aligned} x_1 = x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 = y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда кинетическую энергию можно определить как

$$T = T^+ + T^- = \frac{1}{2}(m_1 + \tilde{m}_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{m}_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - \tilde{m}_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}, \quad (2)$$

где  $T^\pm = \frac{1}{2}(0.5m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{x}_1\dot{\varphi}_{21}R \sin \varphi_{21}$ ;  $\tilde{m}_2 = 2m_2$  – суммарная масса рабочих тел  $m_2$ .

Записывая лагранжиан  $L = T - U(R) - \Pi(x)$ , где  $\Pi(x) = \frac{1}{2}0.5kx^2$  – потенциальная энергия пружины 1 (рис. 1, б) для каждой из двух симметричных частей МСЗ, а также составляя уравнения Лагранжа по координатам  $x_1$ ,  $y_1$  и  $\varphi_{21}$ , получим следующую систему уравнений движения МСЗ в стационарном состоянии [3, 4]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; y_1 = 0; \\ \frac{d}{dt} K_z^\pm = \pm m_2 R [\dot{\varphi}_{21} R + \sin \varphi_{21} (2\gamma_1\dot{x}_1 - a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21})] = \pm M, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{2(m_1 + \tilde{m}_2)}$  – коэффициент затухания и  $a = \frac{\tilde{m}_2 R}{m_1 + \tilde{m}_2}$ . Для стационарного состояния во втором уравнении (3) следует принять  $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ .

Система уравнений (3) сводит МСЗ к двухмассовой механической системе (МС2) с массами  $m_1$  и  $\tilde{m}_2$  [1]. При этом система сил, действующая на МСЗ в стационарном состоянии, соответствует системе сил МС2 (см. рис. 1, с [1]) в проекциях на ось  $x$  системы отсчета  $K$  при  $y_1 = 0$  и  $\dot{y}_1 = 0$ .

Силы инерции  $\vec{\Phi}_{2к}$  Кориолиса рабочих тел  $m_2$  в систему уравнений (3) не входят, так как опорное тело  $m_1$  совершает прямолинейное движение вдоль оси  $x$  системы отсчета  $K$ , для которого  $\vec{\Phi}_{2к} = 0$ .

Суммирование последнего уравнения (3) для двух зеркальных относительно  $x$  частей МСЗ дает

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M - M = 0. \quad (4)$$

Из него следует равенство  $dK_z^+ / dt = -dK_z^- / dt$ , показывающее, что любому изменению  $\ddot{\varphi}_{21} = \dot{\omega}_{21}$  угловой скорости  $\omega_{21}$  рабочего тела  $m_2$  МСЗ (кинетического момента  $dK_z^+ / dt$  одной части МСЗ), вызванному действием

момента  $M$  (рис. 1, *a*), соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение момента  $-dK_z^- / dt$  ее зеркальной части так, что результирующий кинетический момент МСЗ для любых постоянных значений  $\mu_1$ , лежащих в пределах  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$ , сохраняется  $K_z = \text{const}$ . В результате чего у МСЗ (в отличие от МС2 [1]) для любых  $\ddot{\varphi}_{21}$  отсутствует вращение (откат) опорного тела  $m_1$ .

Стационарное значение угловой скорости  $\omega_{21} = \text{const}$  у МСЗ определяется жесткостью пружины 1 (рис. 1, *б*), потенциальная энергия  $\Pi(x)$  которой компенсирует потери кинетической энергии МСЗ в диссипативной среде, тем самым, обеспечивая сохранность ее кинетического момента  $K_z = \text{const}$ .

Дальнейший динамический анализ МСЗ проведем для времени действия  $0 \leq t < t_1$  – вращательного перемещения рабочих тел  $m_2$  из положения  $x_{21}$  в положение  $x_{22}$  (рис. 1, *б*) и времени последействия  $t \geq t_1$  – затухающего движения МСЗ как целой после абсолютно неупругого уравновешенного встречного удара рабочих тел  $m_2$  в положении  $x_{22}$  (рис. 1, *a*), ортогонального оси  $x$  системы отсчета  $K$ .

### Движение МСЗ во время действия

Прямолинейное движение опорного тела  $m_1$  МСЗ вдоль оси  $x$  системы отсчета  $K$  (рис. 1, *a* и *б*) описывается первым уравнением (3), решение которого было получено в работах [2–5]:

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left( \cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left( \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}$  – амплитудный коэффициент;  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  – диссипативный параметр.

По решениям (5) различных фиксированных углов  $\varphi_{21} = \omega_{21}t$  поворота рабочих тел  $m_2$  за время действия  $0 \leq t < t_1$  с ( $t_1 = 0.5$  с) были рассчитаны координаты  $x_1(\varphi_{21})$  и скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21})$  опорного тела  $m_1$ . Также были рассчитаны координаты  $x_C$  ЦМ  $C$  по формулам:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + \tilde{m}_2 x_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; y_C = y_C^+ + y_C^- = 0; \\ \dot{x}_C &= \frac{m_1 \dot{x}_1 + \tilde{m}_2 \dot{x}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}; \dot{y}_C = \dot{y}_C^+ + \dot{y}_C^- = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где координаты  $x_2 = x_1 + \cos \varphi_{21}$ ,  $y_2 = \sin \varphi_{21}$  и определенные по ним скорости

$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} \sin \varphi_{21}$ ,  $\dot{y}_2 = \omega_{21} \cos \varphi_{21}$ ;  $y_C^\pm = \frac{\tilde{m}_2 y_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  и  $\dot{y}_C^\pm = \pm \frac{\tilde{m}_2 \dot{y}_2}{m_1 + \tilde{m}_2}$  – координаты и

скорости ЦМ  $C$  отдельно для верхней и нижней, зеркальных относительно  $x$  частей МСЗ.

Их графики для диссипативного параметра  $\xi = 1$  (5) (сопротивления среды  $\mu_1 = 1.57 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}$ ) показаны на рисунке 2, в, а для  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$  ( $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}$ ) – на рисунке 2, з. Их расчет произведен при собственных параметрах образца МСЗ:  $m_1 = 0.14 \text{ кг}$ ;  $\tilde{m}_2 = 2m_2 = 0.11 \text{ кг}$ ;  $R = 7.5 \text{ см}$ , которые в дальнейшем неизменны.

### Затухающее движение МСЗ во время последнего действия

Так как при повороте рабочих  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t_1 = \pi$  происходит их мгновенное торможение в положении  $x_{22}$  (рис. 1, а и б, рис. 2, а и б) в виде абсолютно неупругого встречного удара с линией удара ортогональной оси  $x$ , то угловая скорость  $\omega_{21}$  их вращательного перемещения при  $\varphi_{21} = \pi$  обратится в нуль ( $\omega_{21} = 0$ ). В результате во время последнего действия  $t \geq t_1$  МСЗ (рис. 2, в и з) будет совершать совместно с ее ЦМ  $C$  вдоль оси  $x$  в системе отсчета  $K$  затухающее поступательное движение по инерции как единое целое со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = \dot{x}_C(t). \quad (7)$$

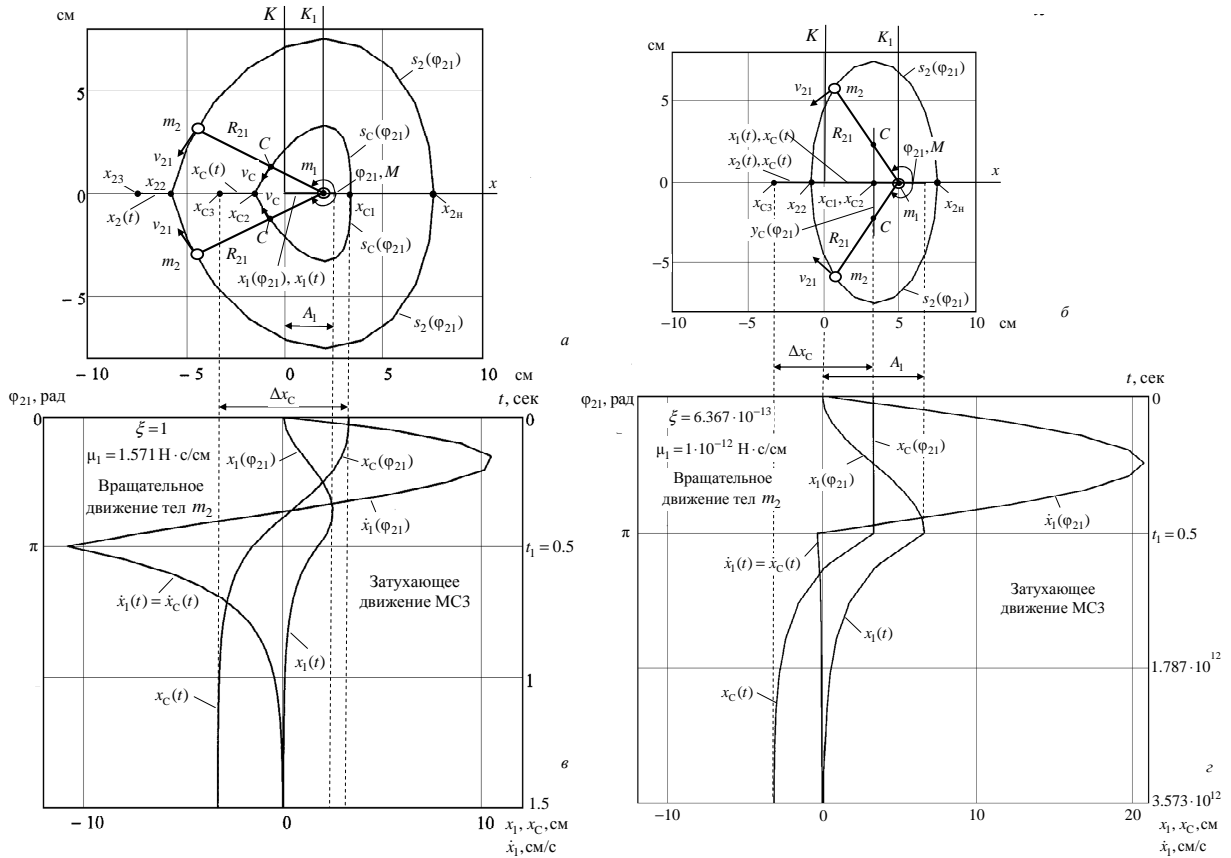


Рис. 2. Кинематическая схема МСЗ – а, б и графики положения  $x_1$  и скорости  $\dot{x}_1$  ее опорного тела  $m_1$ , а также положения  $x_C$  ЦМ  $C$  за время действия и последнего действия  $0 \leq t \leq 1.5 \text{ с}$  при  $\xi = 1$  ( $\mu_1 = 1.571 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}$ ) – в и за время действия и последнего действия

$$0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12} \text{ с при } \xi = 6.367 \cdot 10^{-13} (\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{см}) - з$$

В общем случае затухающее движение МСЗ во время последнего действия  $t \geq t_1$  описывается однородным уравнением вида  $\ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 = 0$  с решениями:

$$x_1(t) = C_1 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \quad x_C(t) = C_3 + C_2 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (8)$$

Дифференцирование  $dx_1(t)/dt$  и  $dx_C(t)/dt$  решений (8) по времени  $t$  определяет равенство (7) как

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) = -2C_2\gamma_1 \exp(-2\gamma_1(t - t_1)). \quad (9)$$

Для определения коэффициентов  $C_1 - C_3$  представим решения (8) и (9) при  $t = t_1$  в виде:

$$x_1(t_1) = x_1(\alpha) = C_1 + C_2; x_C(t_1) = x_C(\alpha) = C_3 + C_2; \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t_1) = \dot{x}_C(\alpha) = -2C_2\gamma_1, \quad (10)$$

где начальное положение  $x_1(\alpha)$  основания  $m_1$ , а также начальное положение  $x_C(\alpha)$  и начальная скорость  $\dot{x}_C(\alpha)$  ЦМ  $C$  определены решениями (5) и формулами (6) для поворота рабочих тел  $m_2$  на угол  $\varphi_{21} = \omega_{21}t = \alpha = \pi$ .

Из (10) получим:

$$C_1 = x_1(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; C_2 = -\dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1; C_3 = x_C(\alpha) + \dot{x}_C(\alpha) / 2\gamma_1. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (8) и (9) дает:

$$x_1(t) = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))]; \dot{x}_1(t) = \dot{x}_C(t) = \dot{x}_C(\alpha) \exp(-2\gamma_1(t - t_1)); \quad (12)$$

$$x_C(t) = x_C(\alpha) + \frac{\dot{x}_C(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))],$$

где  $t \geq t_1$ .

Значения  $x_1(\alpha)$ ,  $x_C(\alpha)$  и  $\dot{x}_C(\alpha)$ , рассчитанные по решениям (5) и формулам (6) при  $t_1 = 0.5$  с,  $\alpha = \pi$  и  $\xi = 1$ , составляют:  $x_1(\pi) = 1.72$  см,  $x_C(\pi) = -1.58$  см и  $\dot{x}_C(\pi) = -10.82$  см/с для рисунка 2, в, а при  $\xi_{\pi} = 6.367 \cdot 10^{-13}$ :  $x_1(\pi) = 6.6$  см,  $x_C(\pi) = 3.3$  см и  $\dot{x}_C(\pi) = -2.64 \cdot 10^{-11}$  см/с для рисунка 2, з.

Графики положения  $x_1(t)$  и скорости  $\dot{x}_1(t)$  основания  $m_1$  МСЗ, а также положения  $x_C(t)$  ее ЦМ  $C$  в системе отсчета  $K$  для времени последствия  $t_1 \leq t \leq 1.5$  с ( $t_1 = 0.5$  с) показаны на рисунке 2, в, а для времени последствия  $t_1 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  – на рисунке 2, з. Они рассчитаны по решениям (12) для двух значений диссипативного параметра  $\xi$  (5):  $\xi = 1$  (для сопротивления среды  $\mu_1 = 1.571$  Н·с/см (рис. 2, в)) и  $\xi = 6.367 \cdot 10^{-13}$  (сопротивление среды  $\mu_1 = 1 \cdot 10^{-12}$  Н·с/см (рис. 2, з)) при ранее заданных собственных параметрах МСЗ.

### Эффект смещения центра масс

Согласно графикам, показанным на рисунке 2, в и з, абсолютное смещение  $\Delta x_C$  ЦМ  $C$  МСЗ в системе отсчета  $K$ , за общее время  $0 \leq t \leq 1.5$  с действия  $0 \leq t < 0.5$  с и последствия  $0.5 \leq t \leq 1.5$  с для рисунка 2, в, а также за общее время  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с действия  $0 \leq t < 0.5$  с и последствия  $0.5 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с для рисунка 4, з составляет [4, 5]

$$\Delta x_C = x_{C3} - x_{C1} = \Delta x_e + \Delta x_r, \quad (13)$$

где  $\Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha)$  – относительное смещение ЦМ в системе отсчета  $K_1$  за время действия  $0 \leq t < 0.5$  с, где знак «минус» указывает на направление смещения (в сторону отрицательных значений положений  $x_C$  ЦМ);

$\Delta x_e = x_{c3} - x_{c2}$  – переносное смещение ЦМ в системе отсчета  $K$ , равное смещению  $\Delta x_e = \Delta x_1$  опорного тела  $m_1$  в системе отсчета  $K$  за время последействия  $0.5 \leq t \leq 1.5$  с для рисунка 2, в и  $0.5 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с для рисунка 2, г.

Согласно рисунка 2, в и г, смещение  $\Delta x_1$  опорного тела  $m_1$  за общее время (действия и последействия)  $0 \leq t \leq 1.5$  с (рис. 2, в) и  $0 \leq t \leq 3.573 \cdot 10^{12}$  с (рис. 2, г) для  $1 \cdot 10^{-12} \leq \mu_1 \leq 1.571$  Н·с/см равно нулю  $\Delta x_1 = 0$ . Следовательно, смещение  $\Delta x_c$  (13) ЦМ не зависит от коэффициента сопротивления  $\mu_1$  диссипативной среды движению опорного тела  $m_1$  и остается постоянным  $\Delta x_c = \Delta x_r = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  [4, 5].

Возможность сохранения постоянного смещения  $\Delta x_c = \text{const}$  (13) ЦМ МСЗ при  $0 \leq \xi \leq \infty$  обеспечивается вкладом угла диссипативных потерь  $\varepsilon = \text{arctg}(\xi)$  (5) в запаздывание  $\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{21} = \pi + \varepsilon$  фазы  $\varphi_{10} = \varphi_{21} + \pi + \varepsilon$  вращательного движения опорного тела  $m_1$  относительно фазы  $\varphi_{21}$  рабочего тела  $m_2$  [1]. Это запаздывание обеспечивает начальное отрицательное значение скорости  $\dot{x}_1(\varphi_{21} = \pi) = \dot{x}_c(\varphi_{21} = \pi) < 0$  опорного тела  $m_1$  при последействии, как для  $\varphi_{21} = \alpha = \pi$  показано на рисунке 2, в и г, для которого выполняется условие

$$x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_c(\alpha)}{2\gamma_1} [1 - \exp(-2\gamma_1(t - t_1))] \right] = x_1(\alpha) + \frac{\dot{x}_c(\alpha)}{2\gamma_1} = 0; \quad \xi \geq \xi_{\text{п}}, \quad (14)$$

полученное из (12) при  $t \rightarrow \infty$ . Согласно (14) для всех  $\xi \geq \xi_{\text{п}}$  значение смещения  $\Delta x_c = \text{const}$ , где  $\xi_{\text{п}}$  – некоторое значение диссипативного параметра  $\xi$  (5), которое примем за пороговое, меньше которого ( $\xi < \xi_{\text{п}}$ ) смещение  $\Delta x_c \neq \text{const}$ .

Физически условие (14) выражает то, что основание  $m_1$  при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к его начальному положению (началу координат системы отсчета  $K$ ), определенному в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 2, в и г), что не противоречит выводам работ [3, 4]. Возможность смещения опорного тела  $m_1$   $\Delta x_1 = 0$  и смещения ЦМ  $\Delta x_c = -a(1 - \cos \alpha) = \text{const}$  (13) подтверждается экспериментом [5].

Для нахождения порогового значения  $\xi_{\text{п}}$  было проведено математическое моделирование смещения  $\Delta x_c$  (13) как функции от коэффициента сопротивления  $\mu_1$ , определяющего коэффициент затухания  $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$  (3) и диссипативный параметр  $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$  (5). Моделирование проводилось в следующем порядке.

Значение коэффициента сопротивления  $\mu_1$  итерационно уменьшалось от  $\infty$  до 0. Для каждого итерационного значения по решению (5) для  $x_1(\varphi_{21})$  и формуле (6) для  $\dot{x}_c(\varphi_{21})$  рассчитывались начальные значения  $x_1(\alpha)$  и  $\dot{x}_c(\alpha)$ , входящие в (12), для поворотов рабочих тел  $m_2$  на угол  $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ .

На каждой итерации и рассчитанных начальных значений  $x_1(\alpha)$  и  $\dot{x}_c(\alpha)$  регистрировалось, когда рассчитанное из (12) при  $t \rightarrow \infty$  положение  $x_1(t)$  опорного тела  $m_1$  становилось отличным от нуля  $x_1(t) \neq 0$  (чему в (13) соответствует  $\Delta x_e = \Delta x_1 \neq 0$  и  $\Delta x_c \neq \text{const}$ ). Если на текущей итерации для рассматриваемого угла  $\alpha = \pi; 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  значение  $x_1(t) \neq 0$ , то для этого угла  $\alpha$  значению  $\mu_1$  присваивается значение порогового сопротивления предыдущей итерации  $\mu_1 = \mu_{1\text{пор}}$ , по которому рассчитываются пороговые значения  $\gamma_{1\text{п}} = \mu_{1\text{п}} / [2(m_1 + \tilde{m}_2)]$  и  $\xi_{\text{п}} = 2\gamma_{1\text{п}} / \omega_{21}$  для этого угла  $\alpha$ .

Результаты математического моделирования иллюстрируются графиками, показанными на рисунке 3.

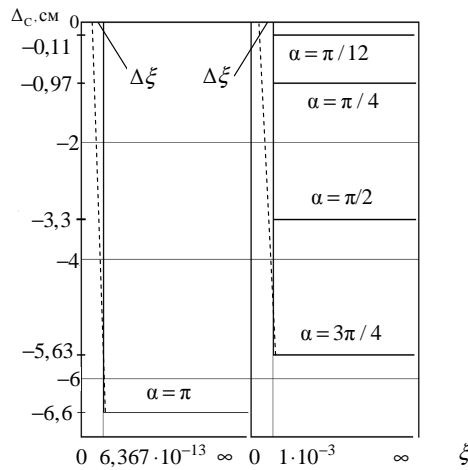


Рис. 3. Графики смещения  $\Delta x_c$  ЦМ МСЗ для фиксированных углов  $\alpha$  как функций от диссипативного параметра  $\xi = f(\mu_1)$  для вариации  $0 \leq \mu_1 \leq \infty$

Уровни постоянного смещения  $\Delta x_c = \text{const}$  как функции от диссипативного параметра  $\xi$  составляют:

– для  $\alpha = \pi$ :

$\Delta x_c = -6.6 \text{ см} = \text{const}$  (рис. 3) в интервале  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  за общее время  $0 \leq t \leq 3.543 \cdot 10^{12}$  с для рисунка 2, в и г, где  $\xi_{\text{п}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$  – пороговое значение диссипативного параметра  $\xi$ , приведенное на рисунке 2, г;

– для  $\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$  (рис. 3):

$\Delta x_c = -5.633; -3.3; -0.967; -0.112 \text{ см} = \text{const}$  (рис. 3) в интервале  $\xi_{\text{п}} \leq \xi \leq \infty$  за общее время  $0 \leq t \leq 2 \cdot 10^3$  с, где  $\xi_{\text{п}} = 1 \cdot 10^{-3}$ .

Смещение  $\Delta x_c$  ЦМ за малый интервал  $\Delta \xi$  уменьшения параметра  $\xi$ :  $\Delta \xi = 0.061 \cdot 10^{-13}$  (для  $\alpha = \pi$ ) и  $\Delta \xi = 0.084 \cdot 10^{-4}$  (для  $\alpha = 3\pi/4; \pi/2; \pi/4; \pi/12$ ) линейно стремится  $\Delta x_c \rightarrow 0$  (на рис. 3 показано штрихпунктирной линией).

Уровень наименьшего порогового значения параметра  $\xi_{\text{п min}} = 6.367 \cdot 10^{-13}$  и наибольшего смещения  $\Delta x_{c \text{ max}} = -6.6 \text{ см} = \text{const}$  ЦМ наблюдается для угла  $\alpha = \pi$  (рис. 2, в и г).



При приближении параметра  $\xi$  к пороговому значению  $\xi \rightarrow \xi_{\text{п}}$  начальная скорость  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi)$  по закону  $-\sin 2\alpha$  стремится к нулю  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) \rightarrow 0$  (рис. 2,  $\nu$  и  $\zeta$ ) и за малый интервал  $\Delta\xi$  приращения параметра  $\xi$  обращается в нуль  $\dot{x}_1(\varphi_{21}) = \dot{x}_1(\pi) = 0$ . При этом в малом интервале  $\Delta\xi$  смещение ЦМ  $\Delta x_c$  стремится  $\Delta x_c \rightarrow 0$ , а при  $\xi_{\text{п}} - \Delta\xi$  обращается в нуль  $\Delta x_c = 0$  (рис. 3).

### Заключение

Таким образом, показано, что МСЗ может сведена к эквивалентной ей МС2 [2] с общим для них решением. Полученные теоретические выводы работы согласуются с экспериментом Толчина [1], теоретическими и экспериментальными исследованиями МСЗ, приведенными в работах [3-5]. Результаты теоретических исследований работы позволяют в представлениях современной механики обосновать возможность эффективного движения инерциоидов [1], а также возможность существенного смещения центра масс [3-5] в среде с малой диссипацией ( $\xi \ll \xi_{\text{п}}$ ). Так, например, для эффективного движения инерциоида Толчина [1] необходимо выбрать разные угловые скорости  $\omega_{21}$  для прямого и обратного перемещения, в одном из которых наблюдается смещение его центра масс, а в другом оно равно нулю [3].

### Список литературы

1. Толчин В.Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. – Пермь: Кн. Изд., 1977. – С. 89-90.
2. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – №87. – С. 135-149. – doi.org/10.17223/19988621/87/11.
3. Савелькаев С.В. Механика. Корреляционная механика механических систем: препринт. – Новосибирск: СГГА, 2013. – 67 с.
4. Савелькаев С.В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения // Вестник СГУГиТ. – 2023. – Т. 27, № 5. – С. 183-202. – doi.org/10.33764/2411-1759-2022-27-5-183-202.
5. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – №4(17). – С. 42-48.

### Сведения об авторе:

*Савелькаев Сергей Викторович* – д.т.н., доцент, профессор кафедры специальных устройств инноватики и метрологии.