

## ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРУГЛЫХ РАВНОМЕРНО РАСТЯГИВАЕМЫХ ПЛАСТИНАХ

*Зеньков Е.В.*

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** теория упругости, компьютерное моделирование, модельная задача.

**Аннотация.** В статье рассматривается решение модельной задачи теории упругости о распределении напряжений вблизи кругового отверстия в круглой пластине, предлагаемое обучающимся в ходе освоения дисциплины теория упругости, с применением компьютерного моделирования этой задачи методом конечных элементов. Полученные в ходе компьютерного моделирования распределение полей напряжений и деформаций позволяет повысить наглядность и понимание физических явлений и процессов при освоении образовательной программы. Проведено сравнение результатов расчётного моделирования и данных, полученных аналитически.

## STUDYING THE PHENOMENON OF MECHANICAL STRESS CONCENTRATION NEAR HOLES IN AXI-SYMMETRICAL ROUND UNIFORMLY STRETCHED PLATES

*Zenkov E.V.*

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** elasticity theory, computer simulation, model problem.

**Abstract.** The article discusses the solution to a model problem of the theory of elasticity on the distribution of stresses near a circular hole in a round plate, proposed to students during the development of the discipline theory of elasticity, using computer modeling of this problem using the finite element method. The distribution of stress and strain fields obtained during computer modeling allows us to increase the visibility and understanding of physical phenomena and processes when mastering the educational program. A comparison of the results of computational modeling and data obtained analytically was carried out.

В рамках дисциплины «Теория упругости» изучаются возникающие под действием внешних сил напряжения и деформации в упруго деформируемых телах. На лабораторных занятиях, предусмотренных данной дисциплиной, рассматривается компьютерное моделирование методом конечных элементов (МКЭ) напряжённо-деформированного состояния (НДС) модельных задач теории упругости, т.е. задач, имеющих аналитическое решение. Численному моделированию подвергаются такие задачи теории упругости, как задача теории упругости о распределении напряжений вблизи кругового отверстия в круглой пластине, распределении напряжений вблизи малого эллиптического отверстия в прямоугольной пластине, распределении напряжений в полом цилиндре, нагруженном внутренним давлением (решение задачи Ламе), задачи о деформировании полуплоскости жёстким штампом с плоским основанием (решение задачи Садовского), задачи о посадке двух соосных цилиндров одинаковой длины, соединённых с натягом, задачи о контактном взаимодействии

сферического упругого тела и упругого полупространства (Задачи Герца) и т.д. [1, 2]. Полученные в ходе компьютерного моделирования распределение полей напряжений и деформаций позволяет существенно повысить наглядность и понимание физических явлений и процессов, происходящих в рассматриваемых телах, упрощает и углубляет процесс формирования у обучающихся необходимых знаний по дисциплине. Кроме того, в рамках выполнения вычислительного эксперимента происходит сопоставление результатов расчётного моделирования и данных, полученные при решении аналитической задачи.

В качестве примера рассмотрим решение задачи теории упругости о распределении напряжений вблизи кругового отверстия [1, 3]. Целью данной работы является изучение явления концентрации механических напряжений в деформируемых телах. Работа выполняется по следующему плану.

1) Изучение влияния малого кругового отверстия на плоское однородное напряжённо-деформированное состояние (НДС) круглых пластин (изучить теоретическое решение задачи Ламе).

2) Построение соответствующих вычислительных дискретных моделей деформирования пластин, равномерно растягиваемых напряжениями, приложенными на наружном контуре.

3) Формулирование выводов об уровне концентрации напряжений и особенностях численного решения соответствующих задач, а также сформировать соответствующие отлаженные файлы с исходными данными для расчёта в системе конечно-элементного моделирования.

Рассмотрим решение подробно. Рассматривается круглая кольцевая пластина, имеющая толщину  $h$ , внутренний радиус  $r = r_в$ , наружный радиус  $r = r_н$  и нагруженная по наружному контуру заданными растягивающими равномерно распределёнными радиальными напряжениями  $\sigma_r = -p$  (рис. 1).

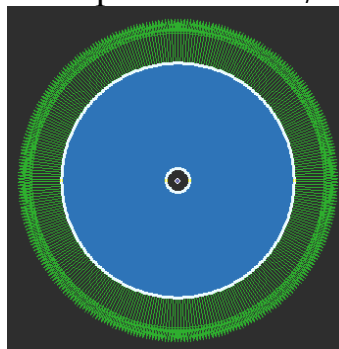


Рис. 1. Круглая кольцевая пластина, растягиваемая равномерными радиальными напряжениями

Можно показать, что при отсутствии центрального отверстия в пластине напряжения во всех точках равномерно и осесимметрично растягиваемой пластины одинаковы и описываются равенствами

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p. \quad (1)$$

В (1) пластина рассматривается в цилиндрической системе координат  $r, \theta$ , введённой на пластине с началом координат в её центре. Угловая координата  $\theta$  отсчитывается от направления оси  $x$ , предварительно введённой на поверхности пластины декартовой системы координат также с началом в центре пластины. Величина  $\sigma_r$  в равенстве (1) – радиальные напряжения в точках пластины с

радиусом  $r$  (нормальные напряжения на координатной поверхности  $r = const$ );  $\sigma_\theta$  – кольцевые напряжения в этой точке (нормальные напряжения на поверхности  $\theta = const$ );  $-p$  – заданное значение растягивающих радиальных напряжений на наружном контуре пластины  $r = r_n$ . Величина  $p_n$  в равенстве (1) и далее понимается как некоторое заданное давление, действующее на соответствующую поверхность.

При создании в растягиваемой пластине отверстия малого диаметра вблизи этого отверстия возникают существенные изменения. Теоретически обоснованные формулы установлены французским исследователем Ламе. Формулы Ламе для точек внутренней кромки отверстия пластины имеют вид

$$\sigma_r = 0; \sigma_\theta = -2p \frac{1}{1 - \left(\frac{r_0}{r_n}\right)^2}. \quad (2)$$

В случае малого отверстия (с инженерной точностью – при выполнении условия  $r_0/r_n < 0,1$ ) формулы (2) можно приближённо записать в виде равенств

$$\sigma_r = 0; \sigma_\theta = -2p. \quad (3)$$

Из равенств (3) следует, что радиальные напряжения при создании в равномерно растягиваемой круглой пластине малого центрального отверстия обращаются в ноль, а кольцевые напряжения увеличиваются при этом по величине вдвое. При удалении от малого центрального отверстия НДС пластины приближается к однородному и на расстоянии порядка нескольких радиусов отверстия от центра пластины увеличение уровня напряжений становится несущественным по сравнению со случаем равномерного растяжения круглой пластины без отверстия. О таких местных подъёмах уровня напряжений, вызванных различными конструктивными неоднородностями – малыми отверстиями, выступами, выточками, вырезами, галтельными переходами, скачкообразными изменениями толщин несущих элементов конструкции или сооружения – о таких подъёмах говорят, как о концентрации напряжений. Сами конструктивные неоднородности, вызывающие местный подъём напряжений, называются при этом концентраторами напряжений. Их влияние на снижение прочности конструкции становится существенным при циклическом и, особенно, при знакопеременном характере её нагружения, вызывающем усталость металла и соответствующее появление усталостных трещин в материале, из которого изготовлен рассматриваемый несущий элемент.

При выполнении всех этапов построения компьютерной модели пластины на основе МКЭ [4] и проведения соответствующего статического расчёта распределение интенсивности напряжений (напряжений Мизеса) в рассматриваемой пластине имеет вид, представленный на рисунке 2.

Полученное распределение интенсивности напряжений показывает, что вблизи кромки отверстия наблюдается существенный подъём уровня напряжений (рис. 2,а). При этом, вдали от кромки (на расстояниях порядка диаметра отверстия) уровень напряжений практически совпадает с полем напряжений в аналогичной растягиваемой пластине без отверстия. Указанное свойство совпадает с особенностями напряженного состояния, определяемого для кольцевой пластины формулами Ламе.

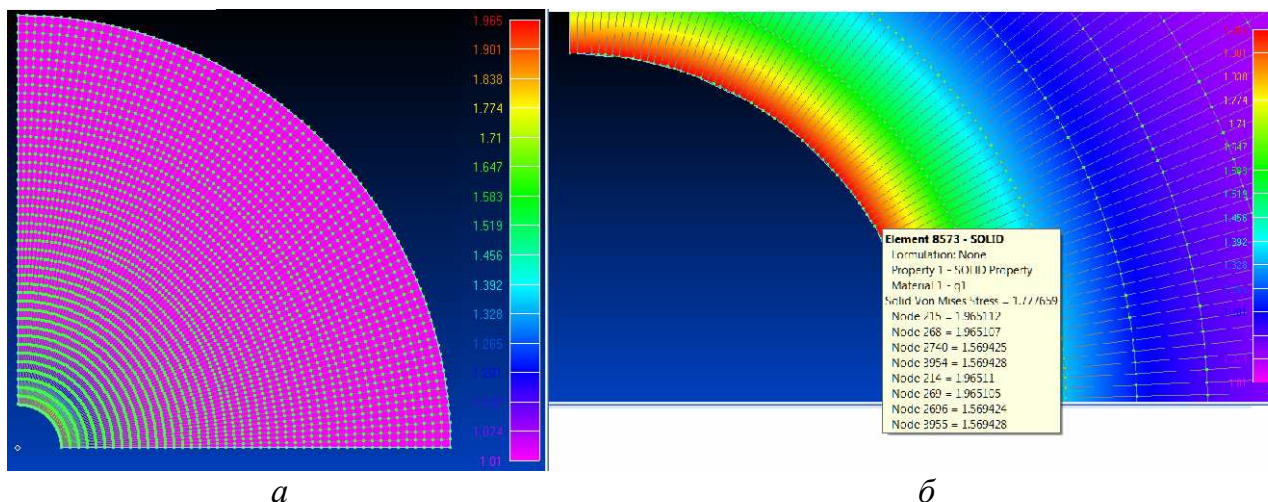


Рис. 2. НДС в растягиваемой пластине с малым круговым отверстием:  
*а* – вид четверти; *б* – вид вблизи кромки отверстия

Детальный поузловой анализ распределения интенсивности напряжений возле кромки отверстия позволяет выявить уровень максимальных напряжений, определённый численно с помощью МКЭ (рис. 2,б). Из результатов видно, что на кромке отверстия значения интенсивности напряжений достигают 1,965 Па, что на 1,75% ниже теоретического расчётного значения, равного 2,000. Указанный результат НДС получен с помощью КЭ-разбивки, для которой размер конечного элемента не превышает 0,2 м.

#### Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Физические основы теории упругости и метода конечных элементов: учебное пособие. – Иркутск: ИрГУПС, 2022. – 116 с.
3. Цвик Л.Б., Зеньков Е.В. Трёхмерный инженерный анализ модельных напряженных состояний упругих тел: лабораторный практикум. – Иркутск: Изд-во ИРНИТУ, 2017. – 132 с.
4. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 704 с.

#### Сведения об авторе:

*Зеньков Евгений Вячеславович* – к.т.н., доцент, доцент кафедры управления качеством и инженерной графики.