

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И АМПЛИТУДОЙ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ПЛОСКИХ ОБРАЗЦОВ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА УСТАЛОСТЬ

*Мыльников В.В.*

*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,  
Нижний Новгород*

**Ключевые слова:** амплитуда деформации, упругость, модуль Юнга, сопротивление усталости, прочность.

**Аннотация.** В работе представлен расчет напряжений образцов прямоугольной формы для оценки изменения амплитудно-частотных характеристик при испытаниях на усталость. Определение напряжений основано на установлении расчетной зависимости между усилием, прикладываемым к образцу, и его перемещением в точке приложения силы с последующим определением напряжением по известной силе. Представлены результаты тарировочных испытаний для статического режима нагружения образцов и произведена оценка действующих на образец сил (внешней, инерции, упругости) с учетом максимального напряжения и максимальной амплитуды деформации при сопоставлении статического и циклического режимов нагружений.

## DETERMINATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN STRESS AND VIBRATION AMPLITUDE FOR FLAT SPECIMENS IN FATIGUE TESTING

*Mylnikov V.V.*

*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,  
Nizhny Novgorod*

**Keywords:** deformation amplitude, elasticity, Young's modulus, fatigue resistance, strength.

**Abstract.** The paper presents the calculation of stresses of rectangular samples to assess changes in amplitude-frequency characteristics during fatigue tests. The determination of stress is based on establishing a calculated relationship between the force applied to the sample and its displacement at the point of application of the force, followed by determination of the stress using a known force. The results of calibration tests for the static loading mode of samples are presented and the forces acting on the sample (external, inertia, elasticity) are assessed taking into account the maximum stress and maximum deformation amplitude when comparing static and cyclic loading modes.

Испытания на усталость материалов проводят с целью определения заданных механических характеристик, применяя стандартные методики испытаний [1-2]. Используя эти данные, выбирают материал для изготовления требуемых деталей и элементов конструкций, проводят прочностные расчеты [3].

Существует достаточно большое разнообразие циклических испытаний материалов [2]. В случае конструирования деталей особо ответственного назначения необходимо проводить специализированные узконаправленные испытания материалов, используя вновь создаваемые оригинальные машины и установки с соответствующими экспериментальными методиками.

В данной работе представлен расчет соотношения между напряжением и амплитудой колебаний плоских образцов при испытаниях на оригинальной

экспериментальной электромагнитной установке [4] для оценки частотной стабильности материалов с целью изготовления упругих элементов высокоточных излучателей, преобразующих электрические колебания в механические, где незначительные изменения частот собственных колебаний, которые как известно связаны с модулем упругости, явлением неупругости и колебанием атомов и их решеток, приводят к недопустимым погрешностям при преобразовании видов колебаний и преждевременному усталостному разрушению.

Для изготовления упругих элементов, работающих в сложных условиях циклического нагружения, а также изделий со стабильными размерами требуются материалы с минимальными проявлениями неупругих свойств [5].

Для таких исследований была разработана оригинальная электромагнитная установка для испытаний по «мягкой» схеме консольного изгиба плоского образца работающая в автоколебательном режиме [4]. В установке реализована работа на основе электромеханической системы, где изгиб образца производится электромагнитной силой, а разгиб происходит под действием сил упругости материала, тем самым обеспечивается циклическое нагружение близкое к синусоидальному.

Для испытаний изготавливались образцы, показанные на рисунке 1, а их размеры показаны в таблице 1.

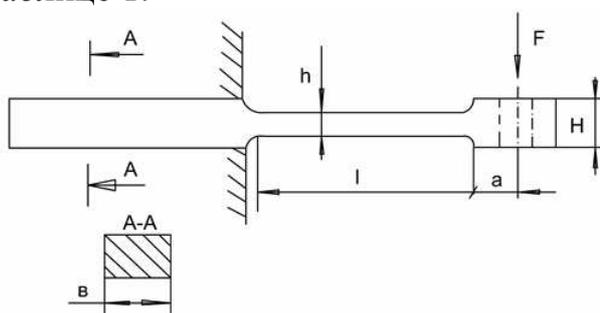


Рис. 1. Эскиз образцов

Табл. 1. Размеры образцов для испытания на усталость

| Образец | $a$ | $b$ | $l$ | $h$ | $H$ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $z$     | 10  | 22  | 43  | 5   | 13  |

Напряжение в расчетном сечении образца определяли по амплитуде колебаний. Определение напряжений основано на установлении расчетной зависимости между усилием, прикладываемым к образцу, и его перемещением в точке приложения силы с последующим определением напряжением по известной силе. Установление расчетной зависимости между усилием и перемещением проводится для статического режима. При этом полагается, что в динамическом режиме (в процессе колебаний) действующие на образец силы (внешняя, инерции, упругости) создадут такое же максимальное напряжение и такое же максимальное перемещение (амплитуду колебаний), как и статическая сила, равная по величине результирующей динамической.

При расчете используется приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки переменного сечения

$$E \cdot J(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x), \quad (1)$$

где  $J(x)$  – момент инерции сечения;  $E$  – модуль Юнга;  $M(x)$  – изгибающий момент;  $y$  – координата в направлении действия силы;  $x$  – координата в направлении оси балки.

Начало координат располагается в месте заделки образца (рис. 1). Момент на расстоянии  $x$  от места заделки:

$$M = F(l + a - x). \quad (2)$$

Уравнение для перемещения части образца с высотой  $h$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F \cdot (l + a - x)}{E \cdot J_1},$$

где  $J_1 = bh^3 / 12$ .

Начальные условия: при  $x = 0, y_1 = 0, \frac{dy_1}{dx} = 0$ .

Решение с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{F}{E \cdot J_1} \cdot x \cdot (l + a - 0,5x), \\ y_1 = \frac{F}{E \cdot J_1} \cdot \frac{x^2}{2} \left( l + a - \frac{x}{3} \right). \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение для перемещения части образца с высотой  $H$ :

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{F(l + a - x)}{E \cdot J_2},$$

где  $J_2 = bH^3 / 12$ .

Решение уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = \frac{F}{E \cdot J_2} \left( l + a - \frac{x}{2} \right) x + C_1, \\ Y_2 = \frac{F}{EJ_2} \left( l + a - \frac{x}{3} \right) \frac{x^3}{2} + C_1 X + C_2. \end{cases} \quad (4)$$

Начальные условия: при  $x = l$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}, y_1 = y_2.$$

Подставив значения  $x = l$  в (3) и (4), и решив полученные уравнения, находим:

$$C_1 = \frac{F}{E} l \left( \frac{1}{2} + a \right) \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right),$$

$$C_2 = -\frac{F}{E} \cdot \frac{l^2}{2} \left( \frac{l}{3} + a \right) \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right).$$

Значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  и уравнение для  $y_2$  из (4) позволяют найти максимальное смещение в точке приложения силы при  $x = l + a$ :

$$A_m = \frac{F}{E \cdot J_2} \cdot \frac{(l+a)^3}{3} + \frac{F}{E} l(l+a) \left( \frac{l}{a} + a \right) \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) - \frac{F}{E} \cdot \frac{l^2}{2} \left( \frac{l}{3} + a \right) \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right).$$

При принятых размерах  $h$  и  $H$  имеет место неравенство  $I_2 \gg I_1$  ( $I_1 = 208,3 \text{ мм}^4$ ;  $I_2 = 3662 \text{ мм}^4$ ). Учитывая это неравенство и пренебрегая собственным изгибом утолщенной части с высотой  $H$  получим более простое выражение:

$$A_m = \frac{F_l}{E \cdot J_1} \left( a^2 + la + \frac{l^2}{3} \right). \quad (5)$$

Напряжение в расчетном сечении (у места заделки):

$$\sigma = \frac{F(l+a)}{W}.$$

Определив  $F$  из (5) и учтя, что  $\frac{J_1}{W} = \frac{h}{2}$ , получим окончательное выражение:

$$\sigma = \frac{1,5h(l+a)}{l(3a^2 + 3la + e^2)} \cdot E \cdot A_m, \quad (6)$$

$$\sigma = 26,9 \cdot 10^{-5} \cdot E \cdot A_m.$$

При среднем значении модуля Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа:

$$\sigma = 53,8 \cdot A_m.$$

где напряжение в МПа, амплитуда в мм.

### Оценка погрешности определения напряжения в расчетном сечении

Зная погрешности прямого измерения амплитуды колебаний модуля Юнга и геометрических размеров образца можно рассчитать погрешность косвенного измерения величины  $\sigma$  воспользовавшись формулой (6):

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \delta_A + \delta_E + \delta_e, \quad (7)$$

где  $\delta_E = \frac{\Delta E}{E}$  – относительная погрешность определения модуля Юнга;

$\delta_A = \frac{\Delta A}{A}$  – относительная погрешность определения амплитуды;

$$\delta_A = \frac{\Delta h}{h} + \left( \frac{1}{a+l} + \frac{1}{l} + \frac{2l+3a}{3 \left( a^2 + ab + \frac{l^2}{3} \right)} \right) \cdot \Delta l + \left( \frac{1}{a+l} + \frac{2a+l}{3 \left( a^2 + ab + \frac{l^2}{3} \right)} \right) \cdot \Delta a \quad (8)$$

– относительная погрешность определения линейных размеров образца.

Относительная погрешность определения амплитуды колебаний нами уже определялась и равна:

$$\delta_A = 0,01(1\%).$$

Относительная погрешность определения линейных размеров образца можно рассчитать по формуле (13):

$$\delta_e = 0,0123 (\approx 1,23\%). \quad (9)$$

В определении модуля Юнга существует некоторая неопределенность. Литературные данные указывают, что эта величина для высокоупругих сталей может находиться в пределах от  $E = 1,9 \cdot 10^5$  МПа до  $2,1 \cdot 10^5$  МПа. Очевидно, в нашем случае за погрешность в определении модуля Юнга необходимо взять  $\Delta E = \pm 10^4$  МПа. Тогда получим:

$$\delta_E = 0,05 (5\%). \quad (10)$$

Суммарная погрешность определения напряжения в расчетном сечении равна:

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = 0,0723 (7,23\%). \quad (11)$$

В качестве контрольного метода определения напряжения в образце использовался метод статической тарировки, который основан на статическом нагружении образца силой  $F$ , измеряемой образцовым динамометром. Напряжение в образце рассчитывалось по известной силе с использованием формулы:

$$\sigma = \frac{6F(l+a)}{bh^2}. \quad (12)$$

Одновременно с показаниями образцового динамометра снимались данные измерителя линейных перемещений, измеряющего деформацию при нагружении.

Результаты тарировочных испытаний позволили построить графики зависимости величин  $\sigma_F$  и  $\sigma_A$  от амплитуды деформации, представленные на рисунке 2.

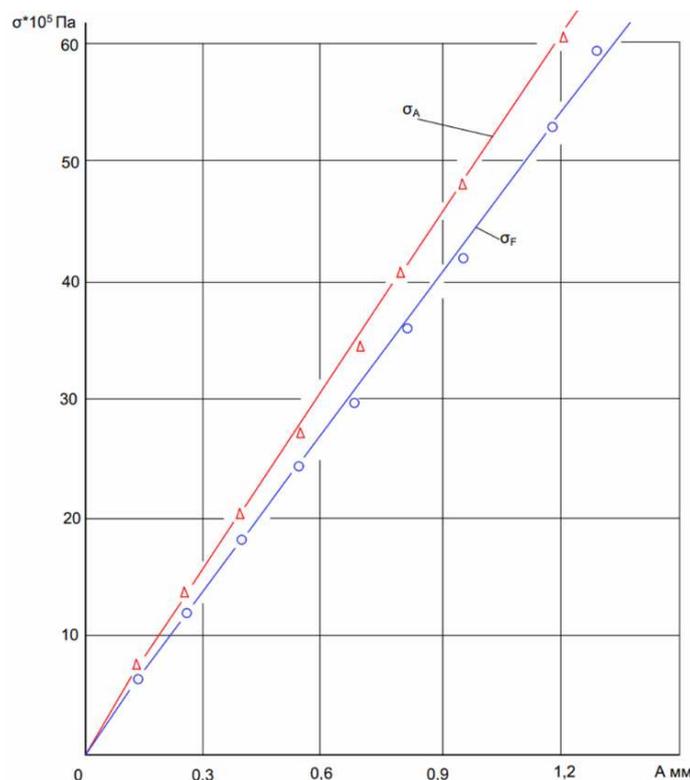


Рис. 2. Напряжение в заданном сечении плоского образца при статической тарировке

Получены следующие значения:

$$\sigma_A = 501 \cdot A_m \cdot 10^{-6} \text{ (Па)}; \sigma_F = \frac{6(l+a)}{bh^2} F = 0,596 \cdot 10^{-6} F \text{ (Па)}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что напряжение в образцах, определенные по амплитуде деформации и по силе, измеренной образцовым динамометром, отличаются не более, чем на 10%.

Чтобы оценить этот результат рассчитаем погрешность определения напряжения в образце по формуле (12). Она складывается из погрешности определения силы,  $\delta_F = \frac{\Delta F}{F}$  и погрешности определения линейных размеров

$$\text{образца: } \delta_e = \frac{\Delta l + \Delta a}{l + a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{z\Delta h}{h} :$$

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \delta_F + \delta_e. \quad (14)$$

При измерении размеров образца микрометром  $\Delta a = \Delta l = \Delta b = \Delta h = 0,01 \text{ мм}$  и  $\delta_e = 0,00075 = 0,075\%$  величина достаточно малая. Основную погрешность вносит процесс измерения силы образцовым динамометром. Эта величина составляет ~1% и полностью определяет погрешность тарировки.

### Заключение

Из графика, приведенных на рисунке 2, видно, что напряжение на образце, рассчитанное по амплитуде деформации  $\sigma_A$  в обоих случаях на 8-10% выше напряжения рассчитанное по силе  $\sigma_F$ . Такое расхождение можно объяснить рядом факторов: погрешностью в определении модуля Юнга, допущениями, сделанными при выводе расчетных формул для  $\sigma_A$  и неучтенными при тарировке систематическими погрешностями.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-13-20009, <https://rscf.ru/project/22-13-20009/>

### Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
2. Школьник Л.М. Методика усталостных испытаний. Справочник. – М.: Металлургия, 1978. – 304 с.
3. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
4. Патент №2781466 РФ. Установка для испытаний на усталость / В.В. Мыльников, Д.И. Шетулов – Заявка №2021127107 от 14.09.2021; опубл. 12.10.2022, Бюл. № 29.
5. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 504 с.

### Сведения об авторе:

*Мыльников Владимир Викторович* – к.т.н., в.н.с. Управления науки, доцент кафедры Технологии строительства.