

ЭЛЕМЕНТЫ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Елисеев А.В.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: механическая колебательная система, колебания твердого тела, передаточная функция, амплитудно-частотная характеристика, динамические состояния, структурное математическое моделирование, оптимальное вибрационное поле, сплайн.

Аннотация. Разрабатывается методология создания математических моделей для формирования, оценки и коррекции вибрационных полей технических объектов, находящихся в условиях интенсивных нагрузений. Основанная на структурном подходе, методология использует формализм Лагранжа, операционное исчисление и теорию колебаний. Разработан подход к формированию вибрационных полей, удовлетворяющих системе требований, основанный на минимизации энергетических функционалов. Поставлена и решена задача построения оптимального вибрационного поля механических колебательных систем на основе критерия оптимальности с учетом строгих требований. Предложенная концепция структурной теории оптимальных вибрационных полей основана на аналогиях между сплайн-функциями и вибрационными полями технических объектов.

ELEMENTS OF THE STRUCTURAL THEORY OF OPTIMAL VIBRATION FIELDS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS

Eliseev A.V.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: mechanical oscillatory system, solid body vibrations, transfer function, amplitude-frequency response, dynamic states, structural mathematical modeling, optimal vibration field, spline.

Abstract. A methodology for creating mathematical models for the formation, evaluation and correction of vibration fields of technical objects under intense loads is being developed. Based on a structural approach, the methodology uses Lagrange formalism, operational calculus and oscillation theory. An approach to the formation of vibrational fields satisfying the system of requirements based on the minimization of energy functionals has been developed. The problem of constructing an optimal vibration field of mechanical oscillatory systems based on the optimality criterion, taking into account strict requirements, is posed and solved. The proposed concept of the structural theory of optimal vibration fields is based on analogies between spline functions and vibration fields of technical objects.

Введение. В настоящее время технологии, использующие вибрационные взаимодействия, достигли значительного развития [1, 2]. В промышленности широко применяются вибрационные технологии, которые стимулируют развитие научных направлений, таких как теория колебаний, теория автоматического управления и динамика машин [3-5]. В области динамики машин особенности вибрационных взаимодействий находят свое отражение в задачах виброизоляции и виброзащиты, а также в задачах оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, которые подвергаются интенсивным нагрузкам силовой или кинематической природы [6-9]. В этой

области большое значение придается эффектам вибрационных взаимодействий, которые применяются в технологических процессах транспортировки горных пород, разделения сыпучих материалов на фракции, упрочнения поверхностей длинномерных элементов авиационных конструкций, пространственной ориентации деталей в процессе сборки и других задачах [10-13]. При изучении зависимости распределений амплитуд колебаний координат контрольных точек от связности внешних возмущений получены детализированные представления, которые могут быть применены при оценке и коррекции динамических состояний технических объектов [14-17]. Определение характеристик внешних вибрационных возмущений позволяет оценить потенциальные воздействия на функционирование технических объектов и влияние на производительность технологических процессов. [18-21]. В задачах виброзащиты негативными эффектами могут служить превышения амплитуд допустимых колебаний, а полезными эффектами – существенное снижение амплитуд колебаний или установление определенного распределения амплитуд. В задачах вибрационного упрочнения длинномерных деталей динамические эффекты могут быть зафиксированы как совпадение форм колебаний контрольных точек рабочих органов вибрационных технологических машин, что обеспечивает одномерность и однородность вибрационного поля в соответствии с требованиями к динамическому качеству взаимодействия рабочей среды и поверхности упрочняемой детали [11]. Условия равенства амплитуд колебаний контрольных точек могут быть использованы для определения необходимой формы движения рабочего органа. В свою очередь, вибрационное поле может быть рассмотрена как обобщение понятия динамического состояния в отдельной точке путем одновременного рассмотрения совокупности точек, которые распределены по определенной области твердого тела или системы твердых тел [22-25].

Значительный интерес вызывают вопросы, связанные с возможностью обобщения задач оценки динамических состояний в точке на оценку динамических состояний, которые отображаются совокупностью амплитуд, распределенных по системе. Решение задач формирования, оценки и коррекции динамических состояний объекта механической колебательной системы ранее были ориентированы на то, что оценка динамических состояний проводилась на основе передаточной функции, для которой входным сигналом служит кинематическое возмущение, а выходным сигналом – колебание координаты объекта, выбранного для оценки [26, 27].

Вместе с тем, оценка динамического состояния на основе одной координаты обладает рядом ограничений.

Для преодоления ограничений, связанных с оценкой динамических состояний на основе измерений в одной точке, развиваются методы оценки динамических состояний объекта на основе амплитуд колебаний в совокупности точек, образующих вибрационное поле. В рамках структурного математического моделирования разрабатывается методологическая основа решения задач формирования, оценки и коррекции оптимальных вибрационных полей механических колебательных систем с конечным числом степеней свободы.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается класс модельных механических систем, совершающих малые вынужденные установившиеся колебания относительно положения статического равновесия (рис. 1).

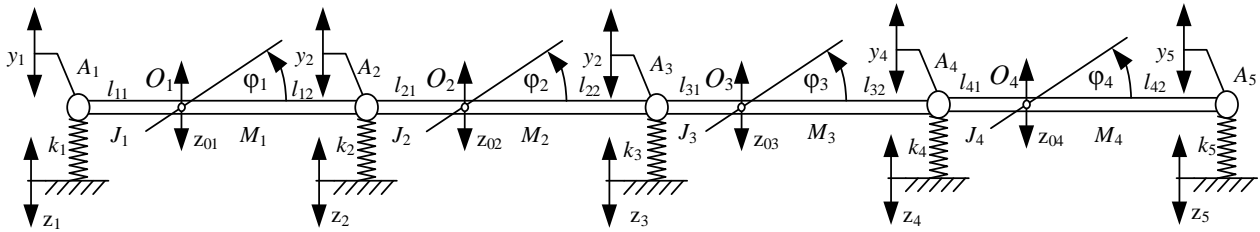


Рис. 1. Механическая колебательная система, образованная твердыми телами $A_i A_{(i+1)}$: A_2, A_3, A_4 – точки сочленения твердых тел [28], O_i – центры тяжести, z_i – гармонические формы колебаний опорных поверхностей, y_i – смещение точек A_i относительно положения статического равновесия, k_i – жесткости упругих элементов, l_{i1}, l_{i2} – плечи рычагов, φ_i – угол поворота стержней $A_i A_{(i+1)}$, J_i – моменты инерции

Предполагается, что в качестве внешних возмущений выступает совокупность синфазных гармонических колебаний опорных поверхностей:

$$z_i = z_g \gamma_i, \tag{1}$$

где совокупность коэффициентов связности γ_i образует конфигурацию кинематических возмущений, z_g – гармоническое колебание. Внешние кинематические возмущения фиксированной частоты и конфигурации определяют амплитуды вынужденных колебаний точек объекта, динамическое состояние которого оценивается. В свою очередь, совокупность амплитуд колебаний точек, распределенных по механической колебательной системе, может быть рассмотрена как вибрационное поле. Изменение конфигурации внешних возмущений при сохранении частоты сказывается на амплитуде вибрационного поля, формируя динамическое состояние системы. Возможность изменения значений амплитуд колебаний точек механической колебательной системы позволяет задавать систему необходимых требований к абсолютным и относительным значениям амплитуд колебаний точек вибрационного поля. В свою очередь, требования могут обладать рядом измерительных особенностей, связанных с точностью, достоверностью и др. В частности, требования к вибрационному полю могут быть избыточны или недостаточны. Избыточность условий не позволяет построить вибрационное поле с заданными требованиями, а недостаточные условия предполагают возможность разработки критерия выбора наиболее подходящего вибрационного поля.

Задача заключается в разработке методологической основы построения вибрационных полей с учетом особенностей системы требований и критериев оптимальности.

II. Математическая модель. Для построения математической модели используется формализм Лагранжа, в рамках которого строится система дифференциальных уравнений с учетом нулевых начальных условий:

$$M_0 \ddot{y} + Ky = Kz, \tag{2}$$

где $M_0 = U^T MU + V^T JV$ – матрица массоинерционных коэффициентов, U, V – матрицы связи координат, K – матрица жесткости.

Система дифференциальных уравнений (2) с помощью интегральных преобразований Лапласа приводится к системе алгебраических уравнений:

$$(M_0 p^2 + K) \bar{y} = K \bar{z}, \quad (3)$$

где знак « \rightarrow » над векторами y и z обозначает изображение по Лапласу [29].

Система алгебраических уравнений (3) может быть представлена в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис.2).

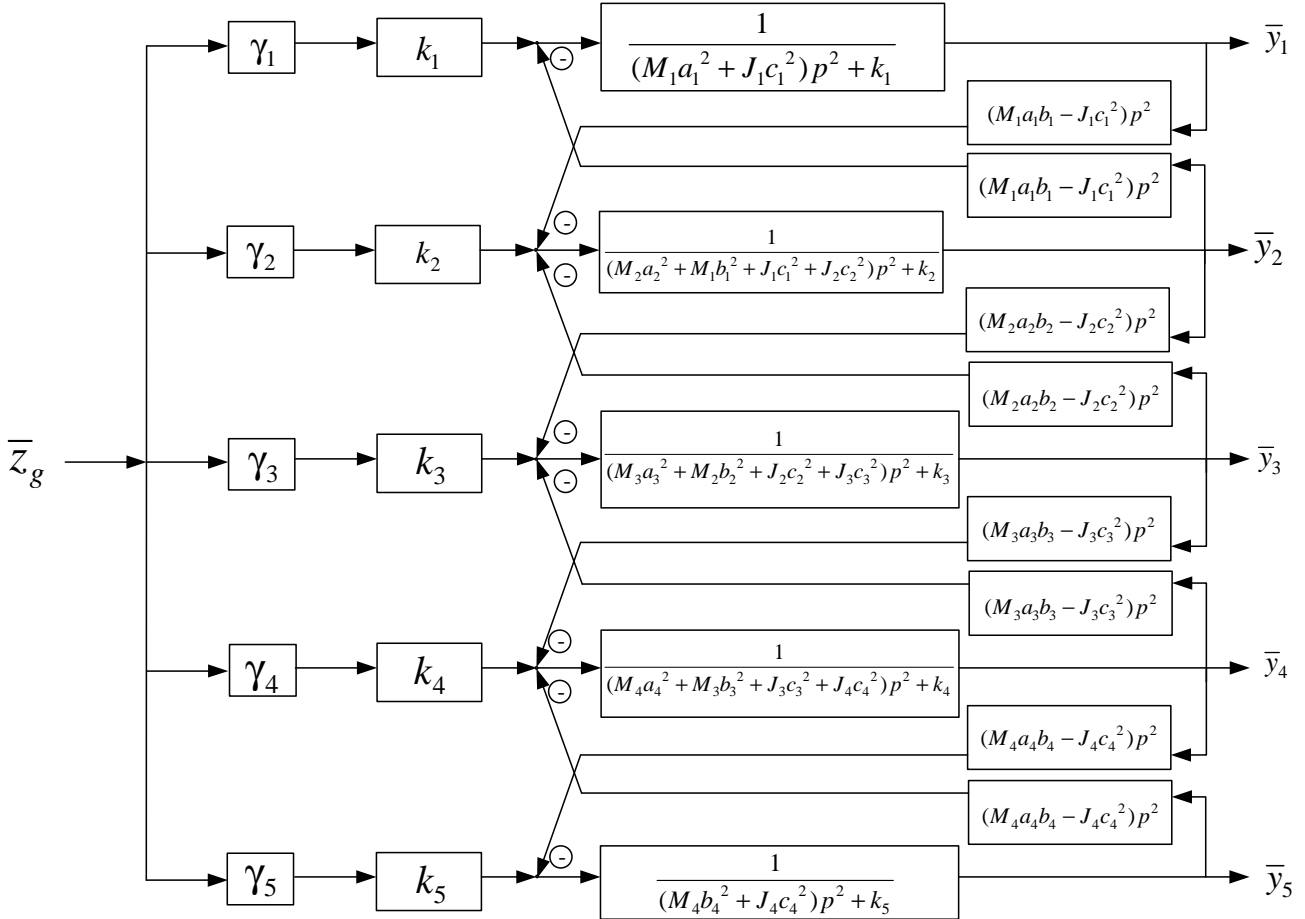


Рис.2. Структурная схема механической колебательной системы по рисунку 1, $p=j\omega$, ω – частота внешних возмущений, $j=\sqrt{-1}$, a_i , b_i , c_i – коэффициенты [6]

Динамические состояния системы могут быть определены на основе структурной схемы с помощью построения передаточных функций, для которых входным сигналом служит кинематическое возмущение системы, а выходным сигналом амплитуда колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_g}, \quad (4)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_g}, \quad (5)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{\bar{z}_g}, \quad (6)$$

$$W_4(p) = \frac{\bar{y}_4}{\bar{z}_g}, \tag{7}$$

$$W_5(p) = \frac{\bar{y}_5}{\bar{z}_g} \tag{8}.$$

Фиксированная конфигурация внешних возмущений \bar{z} (1) определяет совокупность \bar{y} колебаний точек механической колебательной системы:

$$\bar{y} = \left(-M_0\omega^2 + K\right)^{-1} K\bar{z}. \tag{9}$$

Распределение амплитуд колебаний представляет собой вибрационное поле.

III. Построение оптимального вибрационного поля. Для формирования вибрационных полей может быть сформулирована система строгих требований с помощью матрицы A_0 и вектора значения b по аналогии с методами, используемыми в теории абстрактных сплайнов [30-33]:

$$A_0\bar{y} = b, \tag{10}$$

– здесь и далее значок «-» над символом интерпретируется как амплитуда колебаний гармонической формы.

Система строгих требований (10) к вибрационному полю может обеспечиваться совокупностью различных конфигураций внешних кинематических возмущений. Для выбора наиболее подходящего вибрационного поля использован критерий оптимальности. В качестве критерия оптимальности может быть выбран вариационный функционал, отображающий представления о возможных формах вибрационного поля или его энергетических характеристиках:

$$T_e(\bar{y}) = \langle T_{e0}\bar{y}, \bar{y} \rangle, \tag{11}$$

где T_{e0} – неотрицательная матрица, отображающая критерий оптимальности вибрационного поля.

Формальная задача построения вибрационного поля на основе критерия оптимальности (11) с учетом системы строгих требований (10) имеет вид:

$$y_\sigma(\omega) = \arg \min_{A_0\bar{y}=b, \bar{y}=\left(-M_0\omega^2+K\right)^{-1}K\bar{z}} T_e(\bar{y}). \tag{12}$$

Решение задачи (12) построения оптимального вибрационного поля на основе системы строгих требований и критерия оптимальности найдено в виде:

$$y_\sigma = \left(-M_0\omega^2 + K\right)^{-1} Kz_\sigma. \tag{13}$$

Оптимальная конфигурация z_σ внешних кинематических возмущений определена из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} K^T \left((-M_0\omega^2 + K)^{-1} \right)^T T_{e0} \left(-M_0\omega^2 + K \right)^{-1} K & \left(A_0 \left(-M_0\omega^2 + K \right)^{-1} K \right)^T \\ A_0 \left(-M_0\omega^2 + K \right)^{-1} K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_\sigma \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где A_0 – матрица, отображающая оператор необходимых условий.

Заключение. Таким образом, поставлена и решена задача формирования оптимального вибрационного поля с учетом системы строгих требований.

Необходимо отметить, что разработанный подход может быть распространен на широкую совокупность задач построения оптимальных вибрационных полей механических колебательных систем на основе простых и комбинированных критериев оптимальности с учетом строгих требований и требований, допускающих сглаживание требуемых значений вибрационного поля.

Список литературы

1. Juan Carlos A. Jauregui Correa, Alejandro A. Lozano Guzman. Mechanical Vibrations and Condition Monitoring. – Academic Press, 2020. – 208 p. – doi.org/10.1016/B978-0-12-819796-7.00001-9.
2. Harris S.M., Srede C.E. Shock and Vibration Handbook. – New York: McGraw – Hill Book So, 2009. – 1168 p.
3. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Вульфсон И.И. Динамика машин и управление машинами. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
5. Антипов В.А. Подавление вибрации агрегатов и узлов транспортных систем: монография. – М.: Маршрут, 2006. – 264 с.
6. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / ред. А.И. Артюнин. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.
7. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Системный подход в оценке динамических состояний технических объектов: элементы концепции динамических инвариантов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 1. – С. 16-24. – doi.org/10.24143/2072-9502-2023-1-16-24.
8. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагрузениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации // Системы. Методы. Технологии. – 2022. – № 4 (56). – С. 7-15.
9. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. – 2022. –Т. 26, № 3. – С. 368-385.
10. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 404 p.
11. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения. – Воронеж: Научная книга, 2011. – 569 с
12. Блехман И.И. Вибрационная механика-развитие общего подхода, новые результаты и приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет. 2015. – С. 482-484.
13. Fradkov A., Tomchin D., Gorlatov D., Tomchina O. Control of oscillations in vibration machines: Start up and passage through resonance // CHAOS. 2016, p. 116310.
14. Гозбенко В.Е. Классификация структур вибрационного поля // Известия Иркутской государственной экономической академии. – 2004. – №3. – С. 79-81.
15. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Развитие рычажных представлений в оценке динамических состояний механических колебательных систем в условиях связанных вибрационных нагружений // Вестник кибернетики. – 2023. – Т. 22, № 2. – С. 75-86.
16. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1(49). – С. 33-41.

17. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. – 2015. – № 4(28). – С. 15-24.
18. Кирпичников В.Ю. Вред и польза резонансных явлений в элементах судовых конструкций. – Санкт-Петербург: Крыловский государственный научный центр, 2019. – 176 с.
19. Крупенин В.Л., Андрианов Н.А. Моделирование вибрационных полей в системах со множественными соударениями // Вестник научно-технического развития. – 2019. – №12(148). – С. 45-50.
20. Krupenin V., Astashev V. Properties of Vibration Fields in a Two-Dimensional Lattice Structure Colliding with an Obstacle // Proceedings of the 14th International Conference on Vibration Problems. Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Springer, Singapore, 2021. – P. 473-485.
21. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Сухарев Т.Ю., Украинский Л.Е. Оптимизация пространственного расположения рабочих элементов в установках колебательного типа // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 1. – С. 3-8.
22. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Системный подход к оценке состояний вибрационных полей технических объектов в задачах динамики транспортных и технологических машин // Noise Theory and Practice. – 2023. – Т. 9, № 2(33). – С. 65-81.
23. Елисеев А.В., Копылов Ю.Р., Елисеев С.В. Возможности динамической коррекции структуры вибрационных полей рабочих органов технологических машин // Механика и математическое моделирование в технике. II Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная юбилеям основателей кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана профессоров С.Д. Пономарева, В.Л. Бидермана, К.К. Лихарева, Н.Н. Малинина, В.А. Светлицкого. Сборник трудов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – С. 124-129.
24. Елисеев А.В., Вьюнг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1(49). – С. 33-41.
25. Елисеев А.В., Ситов И.С., Нгуен Д.Х. Некоторые вопросы формирования структуры вибрационного поля вибростенда: особенности системы измерения, средства настройки // Системы. Методы. Технологии. – 2016. – № 2(30). – С. 17-26.
26. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects // Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing, Cham. 2020, vol. 252, 521 p.
27. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8.
28. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В., Фомина И.В. Возможности сочленения твердых тел в цепных механических системах // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2010. – № 3(27). – С. 146-152.
29. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.
30. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 216 с.
31. Bezhaev A.Yu. Vasilenko V.A. Variational Theory of Splines. – Kluwer: Academic / Plenum Publishers, 2001.
32. Роженко А.И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 205. – 244 с.
33. Василенко В.А., Елисеев А.В. Абстрактные сплайны с натяжением как функции параметров энергетического оператора // Сибирский журнал вычислительной математики. – 1998. – Т. 1, №4. – С. 301-311.

Сведения об авторе:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент.