УДК 531.01 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2023-12-43-48

ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛА НА ИХ ДВИЖЕНИЕ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

Савелькаев С.В.

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск

Ключевые слова: задача двух тел, относительное и переносное движение, кинетическая энергия, обобщенный корреляционный потенциал, инерционный домен, диссипативная функция и диссипативный параметр, уравнения Лагранжа, второй закон Ньютона, система отсчета.

Аннотация. В статье рассмотрена механическая система, состоящая из опорного и рабочего тел с массами m_1 и m_2, взаимодействующих жесткой связью R, которая шарнирно установлена на опорном теле m_1 с возможностью вращательного движения рабочего тела m_2 относительно опорного тела m_1. Автор показал, что изменение относительного импульса рабочего тела m_2 из-за его взаимодействия с опорным телом m_1 формирует инерционный домен, который совместно с диссипативной средой оказывает на опорное тело m_1 действие, эквивалентное внешнему. Это требует выбора инерциальной системы отсчета, связанной с центром инерционного домена, так как система отчета, связанная с центром масс, не является инерциальной. Полученные результаты могут найти широкое применение при анализе динамики тел, которые взаимодействуют посредством поля тяготения в неоднородной диссипативной газовой среде (небесная механика) с переходом от неинерциальной системы отсчета, которую традиционно связывают с центром масс (гелиоцентрическая система отсчета), к системе отсчета, связанной с центром инерционного домена.

INFLUENCE OF INERTIA FORCE OF RELATIVE MOTION TWO INTERACTING BODIES ON THEIR PORTABLE MOVEMENT

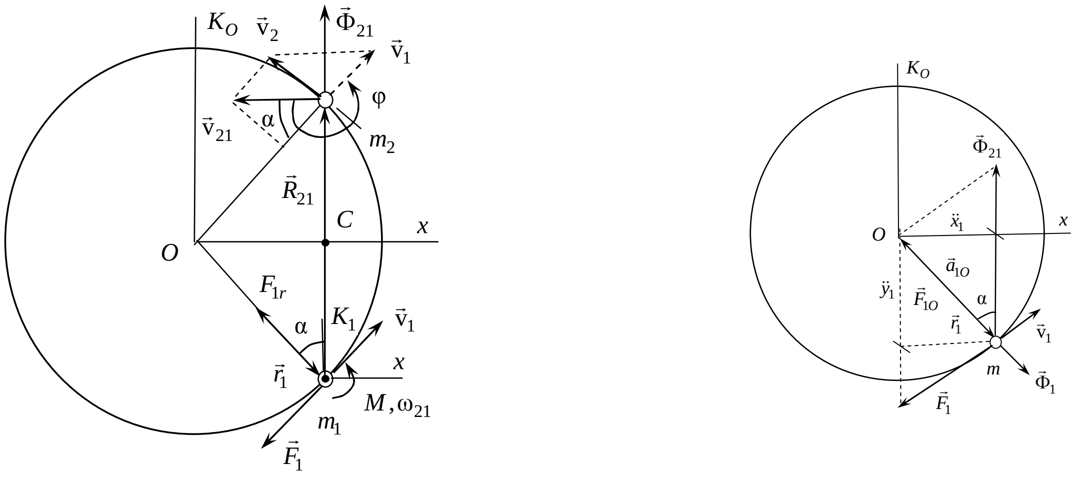
Savel’kaev S.V.

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk

Keywords: two-body problem, relative and transport motion, kinetic energy, generalized correlation potential, inertial domain, dissipative function and dissipative parameter, Lagrange equations and Newton’s second law, reference frame.

Abstract. The article considers a mechanical system consisting of a supporting and working body with masses m_1 and m_2 interacting with a rigid connection R, which is hinged on the supporting body m_1 with the possibility of rotational movement of the working body m_2 relative to the supporting body m_1. The author showed that a change in the relative momentum of the working fluid m_2 due to its interaction with the supporting body m_1 forms an inertial domain, which, together with the dissipative medium, has an effect on the supporting body m_1 that is equivalent to the external one. This requires the choice of an inertial reference frame associated with the center of the inertial domain, since the reference frame associated with the center of mass is not inertial. The results obtained can find wide application in the analysis of the dynamics of bodies that interact with a gravitational field in an inhomogeneous dissipative gaseous medium (celestial mechanics) with the transition from a non-inertial reference system, which is traditionally associated with the center of mass (heliocentric reference system) to a reference system associated with the center of inertial domain.

Рассмотрим механическую систему, показанную на рисунке 1,а. Ее динамический анализ подробно рассмотрен в работах [1, 2].



а б

Рис. 1. Двухмассовая механическая система: а – в виде двух взаимодействующих тел m_1 и m_2; б – в виде тела с приведенной массой m=m_1+m_2

Система содержит опорное тело с массой m_1 и рабочее тело с массой m_2, которые связаны между собой идеальным стержнем R с длиной $R = |\vec{R}_{21}|$. Стержень R шарнирно закреплен на опорном теле m_1 и жестко скреплен с рабочим телом m_2. Рабочее тело m_2 совершает вращательное движение в собственной системе отсчета K_1 опорного тела m_1 с относительной скоростью $\vec{\text{v}}_{21}$, а опорное тело m_1 совершает движение по замкнутой окружности в системе отсчета K_O со скоростью $\vec{\text{v}}_1$. Система отсчета K_1 движется в системе отсчета K_O поступательно, в результате чего координатные оси этих систем отсчета всегда параллельны. На опорное тело m_1 действует диссипативная сила

$$\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1 \tag{1}$$

внешней среды с коэффициентом μ_1 вязкого сопротивления его движению. Угловая скорость ω_{21} вращательного движения тела m_2 поддерживается постоянной $\omega_{21} = \text{const}$ внутренним активным моментом M, действующим на оси шарнира, при этом угловая скорость ω_1 переносного движения тела m_1 равна относительной $\omega_1 = \omega_{21}$. Абсолютная скорость $\vec{\text{v}}_2$ тела m_2 в системе отсчета K_O есть сумма

$$\vec{\text{v}}_2 = \vec{\text{v}}_1 + \vec{\text{v}}_{21}, \tag{2}$$

где $\vec{\text{v}}_1$ – переносная скорость тела m_2 вместе с собственной системой отсчета K_1 тела m_1.

Кинетическую энергию рассматриваемой механической системы можно выразить в виде

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2} m_1 \vec{\text{v}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{\text{v}}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{\text{v}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{\text{v}}_1 + \vec{\text{v}}_{21})^2 = \\ = \frac{1}{2} m \vec{\text{v}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{\text{v}}_{21}^2 + m_2 \vec{\text{v}}_1 \vec{\text{v}}_{21}. \end{gathered} \tag{3}$$

Первое слагаемое $\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2$ – кинетическая энергия поступательного движения механической системы в системе отсчета K_O как целой $m = m_1 + m_2$, второе слагаемое $\frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2$ – кинетическая энергия вращательного относительного движения тела m_2 в системе отсчета K_1 и третье слагаемое $U = m_2\vec{v}_1\vec{v}_{21}$ – обобщенный корреляционный потенциал [2], учитывающий взаимное влияние переносного $\vec{v}_1$ и относительного $\vec{v}_{21}$ движений, вызванное взаимодействием тел m_1 и m_2 связью R.

Раскрывая скалярное произведение векторов $\vec{v}_1\vec{v}_{21}$, представим обобщенный корреляционный потенциал U в виде

$$U = m_2 v_1 v_{21}\cos\varphi = -m_2\omega_1 r_1\omega_{21}R\cos\alpha, \tag{4}$$

где с учетом коммутативности скалярного произведения $v_1 v_{21}$ угол между векторами $\vec{v}_{21}$ и $\vec{v}_1$ можно определить в виде $\varphi = \widehat{\vec{v}_{21}\vec{v}_1} = \pi + \alpha$ (см. рис. 1,а). В таком представлении этот угол учитывает запаздывание фазы угла φ_1 вращательного движения тела m_1 в системе отсчета K_O относительно фазы угла φ_{21} вращательного движения тела m_2 в системе отсчета K_O и устанавливает связь этих углов в виде преобразования [1, 2]

$$\varphi_1 = \varphi_{21} + \varphi = \varphi_{21} + \pi + \alpha, \tag{5}$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}(2\gamma_1/\omega_{21})$.

Учитывая, что $\omega_1 = \omega_{21}$, окончательно запишем

$$U = -m_2\omega_{21}^2 r_1 R\cos\alpha. \tag{6}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае обобщенный корреляционный потенциал U характеризует вклад относительного движения $\vec{v}_{21}$ (в виде его проекции) в переносное движение $\vec{v}_1$ (см. рис. 1,а). При этом изменение переносного импульса $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ замкнутой механической системы во времени из-за взаимодействия тел m_1 и m_2 посредством связи R равно изменению ее относительного импульса $\vec{p}_{21} = m_2\vec{v}_{21}$ с обратным знаком

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1 = -\frac{d}{dt}\vec{p}_{21}. \tag{7}$$

Изменение относительного импульса $\frac{d}{dt}\vec{p}_{21}$ формирует центральное силовое поле. Так, например, частный дифференциал

$$F_{1r} = \frac{dU}{dr_1} = -m_2\omega_{21}^2 R\cos\alpha \tag{8}$$

определяет компоненту относительной силы инерции

$$\vec{\Phi}_{21} = m_2\omega_{21}^2\vec{R}_{21} \tag{9}$$

тела m_2 в виде проекции на направление вектора $\vec{r}_1$. Согласно структуре кинетической энергии T (3), эту компоненту в системе отсчета K_O можно интерпретировать как часть относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ (9), действующую в направлении $\vec{r}_1$ на тело с массой $m = m_1 + m_2$, которая условно сосредоточенна в теле m_1, как показано на рис. 1, б.

Для более детального обоснования этого введем декартовы обобщенные координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O, а также полярную обобщенную координату φ_{21} тела m_2 в системе отсчета K_1. Тогда кинетическую энергию T (3) можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\tilde{m}_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2), \tag{10}$$

где скорости $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ и $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O можно определить через их координаты:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1;\, x_2 = x_1 + R\cos\varphi_{21};\, \dot{x}_1 = \dot{x}_1;\, \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21}\sin\varphi_{21};\\ &y_1 = y_1;\, y_2 = y_1 + R\sin\varphi_{21};\, \dot{y}_1 = \dot{y}_1;\, \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21}\cos\varphi_{21}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подстановка в скоростей (11) в кинетическую энергию T (10) при $\omega_{21} = \text{const}$ дает лагранжиан рассматриваемой механической системы в виде

$$L = T - U(R) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 + U - U(R), \tag{12}$$

где теперь

$$U = -m_2\dot{\varphi}_{21}R(\dot{x}_1\sin\varphi_{21} - \dot{y}_1\cos\varphi_{21}); \tag{13}$$

$U(R)$ – неизвестный потенциал взаимодействия тел m_1 и m_2, зависящий от длины стержня R.

На основе лагранжиана L (12) и диссипативной функции $U = \mu_1\vec{v}_1^2/2$ в работах [1, 2] была выписана система уравнений по обобщенным координатам x_1, y_1, φ_{21}, а также углу отката φ_{11} тела m_1, первые два уравнения которой имеют вид:

$$m\ddot{x}_1 = m_2\omega_{21}^2 R\cos\varphi_{21} + F_{1x};\; m\ddot{y}_1 = m_2\omega_{21}^2 R\sin\varphi_{21} + F_{1y}. \tag{14}$$

Уравнения (14) можно представить в виде второго закона Ньютона в дифференциальной форме

$$m\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1, \tag{15}$$

где $F_{1x} = -\mu_1\dot{x}_1$ и $F_{1y} = -\mu_1\dot{y}_1$ – проекции диссипативной силы $\vec{F}_1$ (1) на оси x и y системы отсчета K_O.

Таким образом, в системе отсчета K_O корреляционный потенциал U (13) определяет компоненты $\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_1} = m_2\omega_{21}^2 R\cos\varphi_{21}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_1} = m_2\omega_{21}^2 R\sin\varphi_{21}$ инерционного домена с силовым центром O, и согласно (14) и (15) действие этих компонент эквивалентно действию на тело m_2 относительной силы инерции $\Phi_{21} = \sqrt{(m_2\omega_{21}^2 R\cos\varphi_{21})^2 + (m_2\omega_{21}^2 R\sin\varphi_{21})^2} = m_2\omega_{21}^2 R$. Эти компоненты характеризуют перераспределение относительного импульса $\vec{p}_{21} = m_2\vec{v}_{21}$ по обобщенным координатам x_1 и y_1 вследствие взаимодействия тел m_1 и m_2 связью R. Инвариантность этих компонент в системах отсчета K_O и K_1 обеспечивается параллельностью их осей координат.

Проанализируем систему сил, действующую на механическую систему, показанную на рисунке 1,*б*. Согласно (15) в системе отсчета K_O на тело $m = m_1 + \tilde{m}_2$ действуют относительная сила инерции $\vec{\Phi}_{21}$ (9) и диссипативная сила $\vec{F}_1$ (1). Результирующая сила $\vec{F}_{10} = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{21}$ вызывает ускорение $\vec{a}_{1O}$ тела m, направленное в системе отсчета K_O к центру O инерционного домена и, следовательно, силу инерции

$$\vec{\Phi}_1 = -m\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \tag{16}$$

этого тела в этой же системе отсчета K_O, направленную в противоположном направлении, что подтверждается общим решением уравнений (14):

$$\ddot{x}_1 = A_1\omega_{21}^2\cos(\varphi_{21}+\alpha);\ \ddot{y}_1 = A_1\omega_{21}^2\sin(\varphi_{21}+\alpha) \tag{17}$$

относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{y}_1$ для стационарного состояния [1, 2]. Эти ускорения определяют модуль $a_{1O} = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2} = A_1\omega_{21}^2$ и направление вектора ускорения $\vec{a}_{1O}$ (см. рис. 1,*б*), где $A_1 = m_2R/(m\sqrt{1+\xi^2})$ – амплитудный коэффициент; $\xi = 2\gamma_1/\omega_{21}$ – диссипативный параметр.

Диссипативная сила $\vec{F}_1$ (1) задает угол диссипативных потерь α (5), который определяет ускорение $\vec{a}_{1O}$ как проекцию ускорения $\vec{a}_{21} = \omega_{21}^2\vec{R}_{21}$ на направление $\vec{r}_1$.

При $\vec{F}_1 = 0$ ($\mu_1 = 0$) значение $\alpha = 0$, и движение тела m будет совершаться относительно центра масс C, с которым в данном случае будет совпадать центр O инерционного домена. Именно это определяет особые свойства центра масс C в механике.

Таким образом, уравнения (14) и (15) сводят рассматриваемую механическую систему к материальной точке с суммарной массой $m = m_1 + m_2$ (см. рис. 1, *б*), условно сосредоточенной в ее опорном теле m_1, которое движется под действием силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ (9) рабочего тела m_2 и диссипативной силы $\vec{F}_1$(1), оказывающей сопротивление движению опорного тела m_1.

Полученные результаты также могут быть широко использованы для исследования динамики тел, взаимодействующих полем тяготения, находящихся в неоднородной диссипативной газовой среде (небесная механика), и обеспечивают переход от неинерциальной системы отсчета, которую традиционно связывают с центром масс C (гелиоцентрическая система отсчета), к системе отсчета, связанной с центром O инерционного домена. Методика определения скорости и координат центра O инерционного домена при переходе в стационарное состояние для нулевых начальных условий приведена в работах [1, 2]. Также полученные результаты в этих работах были использованы для решения задачи трех тел в виде механизма типа «инерциоид», а в работе [3] – для обоснования возможности существенного смещения его центра масс C в среде с малой диссипацией. Структура уравнений (14) согласуется с их структурой, предложенной в работах [4, 5].

Список литературы

1. Савелькаев С.В. Влияние сил инерции взаимодействующих тел механической системы на ее движение в диссипативной среде и особенности движения // Вестник СГУГиТ. – 2022. – Т. 27, № 5. – С. 183-202.
2. Савелькаев С.В. Механика. Корреляционная механика механических систем: препринт. – Новосибирск: СГГА, 2013. – 67 с.
3. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 4(17). – С. 42-48.
4. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. – 2008. – Вып. 2. – Т. 72. – С. 202-215.
5. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления. // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – №3. – С. 168-176.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – д.т.н., доцент, профессор кафедры специальных устройств инноватики и метрологии.