УДК 531+53.081.5+006.91 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2023-12-23-27

О НЕСООТВЕТСТВИИ СМЫСЛА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФОРМУЛЕ РАЗМЕРНОСТИ НА ПРИМЕРАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ

Терещенко В.Г.
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

Ключевые слова: размерность величины, система величин, механика, размерность вектора, физический смысл величины, определительное уравнение, единица измерения.
Аннотация. Статья посвящена проблеме формализации физического смысла величин. Рассматривается обоснованность попыток выразить физический смысл величины при помощи её единицы измерения или размерности единицы измерения величины. Конкретно исследуются примеры формул размерности из области механики, содержащие размерность какой-либо величины во второй степени. Формула размерности площади сопоставлена с векторным выражением площади и его модулем. Приведены примеры из кинематики и динамики.

ON THE DISCREPANCY BETWEEN THE MEANING OF THE DEFINING EQUATION AND THE DIMENSION FORMULA USING EXAMPLES OF THE MATHEMATICAL ACTION OF SQUARING

Tereshchenko V.G.
North-Caucasus Federal University, Stavropol

Keywords: dimension of a quantity, system of quantities, mechanics, dimension of a vector, physical meaning of a quantity, defining equation, unit of measurement.
Abstract. The article is devoted to the problem of formalizing the physical meaning of quantities. The validity of attempts to express the physical meaning of a quantity using its unit of measurement or the dimension of the unit of measurement of the quantity is considered. Specifically, examples of dimensional formulas from the field of mechanics are studied that contain the dimension of a quantity to the second power. The formula for the area dimension is compared with the vector expression for the area and its modulus. Examples from kinematics and dynamics are given.

Прогресс науки приближается к тому, чтобы познать сам процесс научного познания, вывода формул и составления уравнений во всех областях естественных и технических наук. Достижение этой цели даст новое большое ускорение научного, технического и технологического развития. Как обычно, исследование этого вопроса тоже начинается в области механики, распространяясь на всю физику, используя математику, а теперь ещё и программирование и искусственный интеллект. На этом пути есть проблема формализации физического смысла величин. Решить такую проблему обычно пытаются при помощи систем единиц измерения или размерностей величин. Но однозначной классификации и идентификации величин достичь не удаётся. В данной статье мы рассмотрим, насколько формальный принцип образования производных величин может быть использован для образования осмысленных величин. Не претендуя на охват всей темы, рассмотрим здесь частный случай.

Известно много разных систем величин, различающихся набором основных величин. Но принцип построения формулы размерности во всех системах одинаков. Он излагается в международном словаре по метрологии VIM 3, в рекомендациях по межгосударственной стандартизации РМГ 29-2013, в девятом издании брошюры SI [1-3] и в многочисленной научной и учебной литературе. Как записано в [3], производные величины «могут быть выражены через основные величины в соответствии с уравнениями физики. Размерности производных величин записываются в виде произведений степеней размерностей основных величин с помощью уравнений, которые связывают производные величины с основными. В общем случае размерность любой величины Q записывается в виде размерного произведения:

$$\dim Q = \mathrm{T}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{M}^{\gamma}\mathrm{I}^{\delta}\Theta^{\varepsilon}\mathrm{N}^{\zeta}\mathrm{J}^{\eta}, \tag{1}$$

где показатели степени α, β, γ, δ, ε, ζ и η, которые, в основном, являются малыми целыми числами и могут быть положительными, отрицательными или нулевыми, называются показателями размерности.» В этом изложении, в отличие от [1], более заметно отделены уравнения физики, связывающие величины, от формул размерности, выражающих размерность производной величины через размерности основных величин. Однако, не делается акцента на этом различии. Уравнения физики не ограничены в применении тех или иных математических операций и функций. А формула размерности может представлять собой только «произведение степеней сомножителей, соответствующих основным величинам, в котором численные коэффициенты опущены» [1]. Эти правила образования размерности производной величины ограничивают математический аппарат формул размерности. Поэтому формула размерности, в общем случае, не может во всей полноте передать смысл определительного уравнения, на котором она базируется.

С другой стороны, далеко не любое математическое выражение, составленное из размерностей основных величин по указанным правилам, окажется формулой размерности реальной величины. Нужно ещё, чтобы это выражение соответствовало общепринятому определению какой-либо величины или известному физическому закону.

Но в чём заключается взаимное соответствие между физическим определительным уравнением и формулой размерности? Передают ли привычные нам формулы размерности и действия с размерностями в них смысл определительных уравнений и смысл математических действий с физическими величинами? Попытаемся рассмотреть этот вопрос на конкретном примере. Возьмём одно из самых распространённых действий в формулах размерностей – возведение во вторую степень, то есть умножение размерности самой на себя. Найдём, если возможно, соответствующее действие в физических уравнениях. Ограничимся рассмотрением величин механики, включая геометрию, для того, чтобы рассуждения были полностью понятны специалистам в данной области.

Пример из геометрии. Первый пример, который сразу вспоминается, и который приведёт любой школьник, – это размерность площади, как размерность длины во второй степени. Недаром умножение числа на самого себя называют возведением в квадрат. Можно ли сказать, что, вычисляя площадь, мы умножаем длину саму на себя? Можно ли сказать, что, вычисляя площадь, мы вычисляем произведение двух скалярных величин рода «длина»? Нет, в общем случае, площадь параллелограмма $\vec{A}$ вычисляется при помощи действия векторного произведения векторов длины.

$$\vec{A} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 .$$

Векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, соответствующие сторонам параллелограмма, обязательно должны различаться по направлению и, в общем случае, различаются по модулю. Смысл этого определительного выражения не может быть полностью и адекватно передан формулой размерности L^2, построенной по общепринятому правилу. «В выражении размерности величины не учитывают её скалярный, векторный или тензорный характер» [1]. Модуль площади $A=l_1 l_2 \sin\alpha$ вычисляется при помощи функции sin, которая не отображается в формулах размерностей. И только единица измерения площади $м^2$ (или другая единица длины в квадрате) соответствует формуле размерности L^2.

В данном примере приходим к выводу, что возведение в квадрат размерности длины не отображает в полной мере смысл геометрической формулы площади параллелограмма (в том числе прямоугольника, квадрата), но соответствует действию с единицами измерения длины для получения единицы измерения площади.

Выражение (1) было сделано формулой размерности в общем виде для всех систем величин для того, чтобы избавить формулы и уравнения от лишних коэффициентов, переводящих единицы измерения одних величин в единицы измерения других величин. На это мы обращали внимание в [4]: «Единицы измерения, которые в последовательных расчётах образуются одни из других без переводных коэффициентов (с коэффициентами, равными 1), составляют группу когерентных единиц. Совокупность когерентных единиц составляет систему единиц». Таким образом, формула (1) организует систему единиц, а потом переносится в соответствующую систему величин. Задачи выявления физического смысла величины, систематизации и идентификации величин эта формула не решает. Эти задачи не ставились при разработке данной формулы. Можно согласиться с [5] в том, что формулу размерности (1) нужно называть не размерностью величины, а размерностью единицы величины.

В анализе размерностей известен приём введения разных единиц длины и разных размерностей для разных, взаимно перпендикулярных направлений [6]. Такой приём позволяет увеличить число независимых, то есть основных, единиц (величин) в уравнениях анализа размерностей. Соответственно, уменьшает число неизвестных в уравнениях. Но на всю систему этот метод не распространён, а применяется в отдельных задачах.

В настоящее время делаются шаги для создания системы величин, различающей размерности скалярных и векторных величин, и использующей действия с векторами в формулах размерностей [7, 8]. Формула размерности самой величины, а не её единицы измерения, может содержать размерность направления, которую предложено обозначать D. Направление объединяется с длиной, образуя геометрическую величину – вектор, с размерностью $\mathsf{D}\circ\mathsf{L}$. Для обозначения объединения здесь использован символ «$\circ$». Векторное произведение размерностей геометрических величин будет обозначаться символом «×». В такой системе величин формула размерности будет отображать физический смысл величины. Возведение размерности в квадрат в этой системе величин не предусмотрено.

Примеры из кинематики и динамики. Мы пытаемся найти пример осмысленной производной физической величины, полученной возведением какой-либо величины во вторую степень, а не бессмысленный фрагмент, вырванный из контекста формулы. Но найти такой пример невозможно.

В формуле пути l, который пройден с постоянным ускорением a при отсутствии начальной скорости, $l=at^2/2$ имеется фрагмент в виде времени в квадрате t^2. У него отсутствует самостоятельный физический смысл, это – не величина, такой величины с размерностью T^2 не найти в справочниках, таблицах величин и т.д. Этот фрагмент не образован умножением времени самого на себя. Он возник в результате интегрирования скорости at по времени t, как часть выражения для производной величины. Возможность записи единицы измерения времени в квадрате с^2 не гарантирует существования соответствующей величины, так же, как возможность записи единицы измерения времени в пятьдесят шестой степени с^{56} не гарантирует существования соответствующей величины.

В формуле кинетической энергии $mv^2/2$ есть фрагмент v^2, который не является величиной. Он не образован умножением скорости самой на себя, а является фрагментом результата интегрирования импульса mv по скорости v. Нет величины, соответствующей размерности $(\mathsf{L}/\mathsf{T})^2$ или $(\mathsf{L}^2/\mathsf{T}^2)$. Так же, как нет величины с размерностью L^2, даже когда длина рассматривается как скаляр. То есть, известное математическое действие возведения в квадрат допускается правилами образования формулы размерности (1), но в реальности для образования производной величины не используется.

Также и в знаменателе формулы размерности квадрат размерности является не размерностью величины, а фрагментом записи размерности. Например, размерность ускорения LT^{-2} содержит размерность времени в минус второй степени. Размерность ускорения сопоставляем с определением модуля ускорения, как второй производной от пути по времени

$$a = d\left(\frac{dl}{dt}\right)\Big/dt\,.$$

Здесь действия с величиной «время» по своему смыслу весьма далеки от возведения в минус вторую степень.

Выводы. Можно найти очень много примеров формул размерности, построенных по принципу (1), и содержащих размерность какой-либо единицы величины в соответствующей системе величин, возведённую в квадрат. Но невозможно найти среди этих примеров хотя бы один пример образования осмысленной производной величины путём возведения в квадрат основной или производной величины. Говоря очень кратко, возведение в квадрат не используется для образования производных величин. В данной статье наши выводы ограничены только величинами из области механики и обсуждаемой второй степенью. Читатель может самостоятельно рассмотреть примеры из разных областей физики и с любыми значениями показателя степени. Но приведённых примеров уже достаточно для того, чтобы показать непригодность формул размерности единиц величин для передачи физического смысла.

Список литературы

1. Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины: пер. с англ. и фр. / Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. Изд. 2-е, испр. – СПб.: НПО «Профессионал», 2010. – 82 с.
2. РМГ 29–2013. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. – М.: Стандартинформ – 2014.
3. Международная система единиц (SI). Издание 9-е. 2019. Bureau International des Poids et Mesures. Перевод на русский язык. Издание подготовлено Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии (Росстандарт).
4. Терещенко В.Г. Состояние вопроса систематизации величин // Актуальные проблемы инженерных наук. Материалы X (67-й) ежегодной научно-практической конференции Северо-Кавказского федерального университета. – Ставрополь, 2023. – С. 335-337.
5. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, Физматлит, 1965. – 304 с.
6. Huntley H.E. Dimensional analysis – New York: Dover Publication, Inc., 1967. – 158 p.
7. Терещенко В.Г. Систематизация направленных величин с помощью размерностей // Фундаментальные основы механики. – 2019. – №4. – С. 33-39.
8. Терещенко В.Г. О размерностях векторных величин в механике // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2023. – № 20. – С. 40-45. – doi.org/10.26160/2658-3305-2023-20-40-45.

Сведения об авторе:

Терещенко Владимир Григорьевич – к.т.н., доцент, доцент кафедры технической эксплуатации автомобилей.