

## МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ВО ВРЕМЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

*Журавлёва Е.Ю.*

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург*

**Ключевые слова:** задания по динамике системы, фундаментальные законы динамики, дифференциальные уравнения движения, центр масс, угловое ускорение, силы натяжения, реакции опор балки.

**Аннотация.** В работе рассматривается методика проведения практического занятия по теме: «Применение фундаментальных законов динамики механической системы». Приводятся четыре схемы индивидуального задания. Рассматривается решение одного из вариантов. Обоснована последовательность выполнения пунктов задания. Отмечены особенности психологического восприятия студентами формулировок законов и методов решения задач.

## METHODOLOGICAL FEATURES OF THE ANALYSIS OF FUNDAMENTAL LAWS OF DYNAMICS DURING A PRACTICAL LESSON IN THEORETICAL MECHANICS

*Zhuravleva E.Yu.*

*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg*

**Keywords:** tasks on system dynamics, fundamental laws of dynamics, differential equations of motion, center of mass, angular acceleration, tension forces, reaction of the supports of a beam.

**Abstract.** The paper discusses the methodology for conducting a practical lesson on the topic: “Application of the fundamental laws of dynamics of a mechanical system.” Four schemes for individual assignments on this topic are presented. A solution to one of them is being considered. The sequence of task items is justified. The peculiarities of students' psychological perception of the formulations of laws and methods of solving problems are noted.

Задания для самостоятельной работы по теоретической механике для нескольких поколений студентов традиционно черпались из популярных сборников задач Мещерского И.В. [1], Яблонского А.А. [2], Кепе О.Э. [3] и др. Однако, ни для кого не секрет, что почти все задачи из этих пособий давно растиражированы в интернете, расписаны в многочисленных «решебниках» [4-6] и монетизированы. Такие решения всегда узнаваемы и ставят преподавателя перед выбором: делать вид, что студент сам решил задачу, и принять ее, либо добиваться от него самостоятельного решения, вводя некоторые изменения в исходные условия задачи. С другой стороны, можно изменить способ решения не только одного, а сразу всех вариантов индивидуального задания, и тогда можно надеяться, что самостоятельно работать будут уже целые группы студентов.

В этой связи в качестве подходящего варианта для освоения фундаментальных законов механики системы были выбраны механические модели, которые обычно используют для решения уравнений кинетостатики. Они

оказались удобными для изучения основных теорем динамики, и на их основе было составлено обновленное индивидуальное задание.

На рисунке 1 можно видеть четыре типовых варианта заданий. Подвижные системы составлены либо из блока и грузов, либо только из блоков (рис. 1,б,г). Блоки вращаются вокруг неподвижных осей, закрепленных на неподвижной невесомой балке. На рисунке 1,б на балке находятся оси обоих блоков. Подвижные тела соединены между собой нерастяжимыми тросами и приводятся в движение либо постоянным моментом  $M$  (рис. 1,б,г), либо под действием сил тяжести (рис. 1,а,в). Все геометрические размеры конструкций, значения момента  $M$  и сил тяжести грузов  $P_i$  задаются в таблице исходных данных.

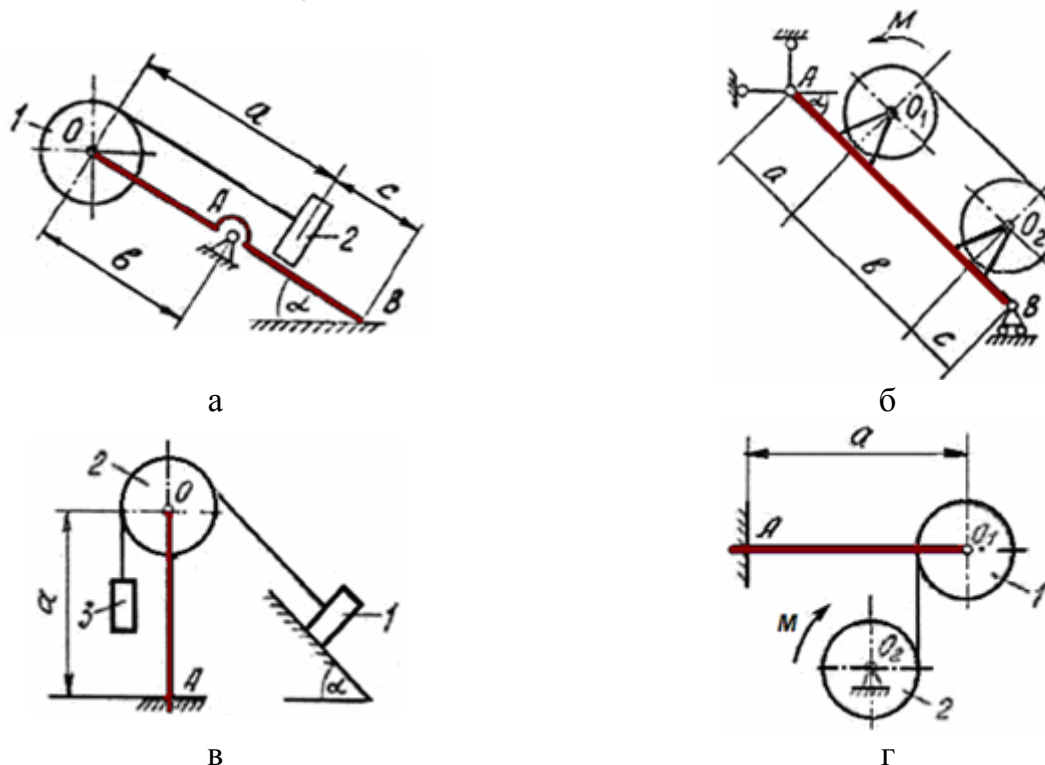


Рис. 1. Типовые задания

### Постановка задачи

Для заданного положения системы определить:

1. Ускорения тел.
2. Уравнение движения тела 1 при нулевых начальных условиях.
3. Силы натяжения в разных ветвях тросов.
4. Реакции опор невесомой балки.

Блоки рекомендуется считать сплошными однородными дисками, а тросы рассматривать невесомыми и нерастяжимыми. Проскальзыванием тросов по блокам и трением скольжения для грузов можно пренебречь.

Остановимся на некоторых методологических аспектах объяснения задания в аудитории. Как правило, студенты предлагают начать решение с 4-го пункта, который им кажется знакомым и простым. Они охотно выходят к доске, составляют уравнения равновесия, не обращая внимания на то, что, по условию, тела находятся в движении (ведь на рисунке этого не заметно!). Они очень удивляются, когда слышат, что уравнения верные, но только для неподвижной

системы, а в данном примере массивные тела движутся с ускорением, поэтому реакции в опорах балки будут иными.

Студентам рекомендуется, как ранее в задачах статики, мысленно отделить подвижные тела от неподвижной балки и даже изобразить их на отдельных рисунках. Если рисунок остается без разбиения, то чаще всего вместо четырех реакций на оси вращения блока студенты изображают только две силы - реакции оси блока, а про ответные «противодействия» на балку забывают.

Рассмотрим в качестве конкретного примера механическую систему, изображенную на рисунке 1,а. Отделим подвижную часть конструкции от неподвижной балки и составим для блока и груза (рис. 2,а) уравнения движения, а для балки (рис. 2,б) – уравнения равновесия.

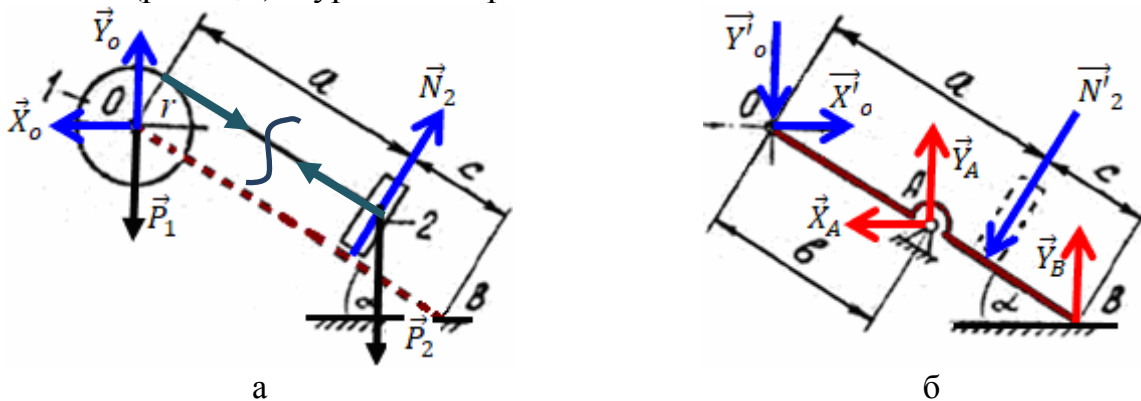


Рис. 2. Расчетные схемы

Система дифференциальных уравнений движения блока и груза имеет вид

$$\begin{cases} J_1 \varepsilon_1 = S \cdot r; \\ m_2 \cdot w_2 = P_2 \cdot \sin \alpha - S'; \\ 0 = N_2 - P_2 \cdot \cos \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

В системе ДУ (1) приняты следующие обозначения:  $J_1$  – момент инерции однородного блока;  $\varepsilon_1, w_1$  – угловое ускорение блока и линейное ускорение груза;  $m_2$  – масса груза;  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  – силы тяжести;  $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$  – реакции оси  $O$  на блок,  $\vec{N}_2$  – нормальная реакция балки на груз,  $\vec{S}$  и  $\vec{S}'$  – реакции тросов, действующие на блок и на груз.

Приходится напоминать студентам, что в динамике правило знаков диктуется физикой процесса, а не направлением координатных осей, и за положительное направление принимается направление истинного движения тела. Поэтому движущие силы и моменты всегда будут входить в правую часть ДУ с плюсом, а тормозящие усилия – с минусом.

Уравнения равновесия балки  $OAB$

$$\begin{cases} X'_O - X_A = 0; \\ Y_B + Y_A - Y'_O = 0; \\ Y_B (a + c) \cdot \cos \alpha - N'_2 \cdot a + Y_A \cdot b \cdot \cos \alpha - X_A \cdot b \cdot \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В данной системе уравнений  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$ , – реакции опор балки  $A$  и  $B$ ;  $\vec{X}'_O, \vec{Y}'_O, \vec{N}'_2$  – ответные воздействия блока и груза на балку, «противодействия».

Силы взаимодействия между телами подчиняются 3-му закону Ньютона

$$\vec{S} = -\vec{S}'; \vec{N}_2 = \vec{N}'_2; \vec{X}_O = \vec{X}'_O; \vec{Y}_O = \vec{Y}'_O. \quad (3)$$

В рассматриваемом примере следует считать, что на конце  $B$  балка не заделана жестко, а опирается свободно на горизонтальную опору и прижимается к ней скользящим по балке грузом.

Требуется также составить кинематическое соотношение связи между ускорениями двух тел  $\varepsilon_1 \cdot r_1 = w_2$  и получить дополнительные уравнения для определения реакций оси вращения блока  $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$ .

В процессе обсуждения задачи от студентов не раз доводилось слышать: «Реакции оси на блок можно найти из уравнения равновесия блока». Замечание, что блок не находится в равновесии, что он вращается, и более корректной будет фраза: «Реакции  $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$  получаются из теоремы о движении центра масс блока», – психологически принималось не сразу, поскольку центр блока неподвижен.

Для блока теорема о движении центра масс имеет вид

$$0 = \vec{X}_O + \vec{Y}_O + \vec{P}_1 + \vec{S}. \quad (4)$$

Для системы «блок-груз» эта же теорема выглядит немного иначе

$$m_1 \cdot \vec{0} + m_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{X}_O + \vec{Y}_O + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}. \quad (5)$$

После анализа уравнений становилось ясно, что реакции опор балки  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$ , блока  $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$  и сила натяжения троса  $\vec{S}$  зависят от значений **ускорений**, и выполнение задания следует начать именно с поиска **ускорения**.

В результате решения системы ДУ (1) определяется угловое ускорение блока

$$\varepsilon_1 = \frac{g \cdot P_2 \sin \alpha}{2r_1 \cdot (P_1 + 2P_2)}. \quad (6)$$

Стоит показать студентам, как можно найти это ускорение быстрее, составляя только одно ДУ для системы «блок-груз» с помощью теоремы об изменении кинетического момента относительно оси блока. Однако для 2-х блоков (рис. 1, в, г) этот способ не подходит, о чем следует предупредить заранее.

В дальнейшем при изучении теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме  $\frac{dT}{dt} = \sum_j N_j^e$  студентам вновь предлагается найти уже

известное ускорение из единственного ДУ. На удивление, некоторые из студентов считают, что проще составлять и решать именно систему дифференциальных уравнений движения, видимо, потому что на нее они потратили много самостоятельных усилий, и ход решения закрепился в сознании.

Опыт показывает, что большинство студентов глубже вникают в условие задачи и изучаемые методы, когда решают задачу более подробно и самостоятельно. Самостоятельная работа студентов важнее, чем знакомство с большим числом готовых примеров, поэтому индивидуальные задания могут не быть сложными по постановке и методам их выполнения, но они должны быть

достаточно оригинальными, чтобы не встречаться в «интернет-решебниках». Важно, чтобы в сознании студентов образовалась связь между поставленной в задаче целью и применяемыми методами, чтобы они видели перспективу и логику решения.

### Список литературы

1. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина.– СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 448 с.
3. Сборник коротких задач по теоретической механике / Под ред. О.Э. Кепе. – СПб.: Изд-во «Лань», 2020. — 368 с.
4. Решебник по термеху Мещерский [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://teor-meh.ru/catalog/zadachi\\_iz\\_mesherskogo.html](https://teor-meh.ru/catalog/zadachi_iz_mesherskogo.html)
5. Решебник по термеху Яблонский [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://teor-meh.ru/catalog/zadachi\\_iz\\_yablonskogo.html](https://teor-meh.ru/catalog/zadachi_iz_yablonskogo.html)
6. Решебник по термеху Кепе [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://teor-meh.ru/catalog/zadachi\\_iz\\_kepe.html](https://teor-meh.ru/catalog/zadachi_iz_kepe.html)

### Сведения об авторе:

*Журавлёва Елена Юрьевна* – к.т.н., доцент, инженер.