УДК 531/534:001.8 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2023-11-28-34

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ ПРАВИЛЬНОГО ЗАДАНИЯ УГЛОВ ЭЙЛЕРА

Орлянская Т.И.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва

Ключевые слова: абсолютно твердое тело, неподвижная точка, углы Эйлера, системы углов Эйлера, задачи кинематики твердого тела, кинематические характеристики движения, матрицы поворотов.
Аннотация. В статье рассматривается два различных способа выбора трех углов, которые однозначно определяют положение твердого тела с одной неподвижной точной в трехмерном евклидовом векторном пространстве и выясняется практическая ценность выбранных трех углов для определения кинематических характеристик движения твердого тела и его отдельных точек, если заданы законы изменения этих углов во времени.

ROTATION OF A RIGID BODY AROUND A FIXED POINT. THE PRACTICAL VALUE OF CORRECTLY SETTING EULER ANGLES

Orlyanskaya T.I.
Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Keywords: absolutely rigid body, fixed point, Euler angles, Euler angle systems, rigid body kinematics problems, kinematic characteristics of motion, rotation matrices.
Abstract. The article discusses two different ways to choose three angles that uniquely determine the position of a rigid body with one fixed exact point in a three-dimensional Euclidean vector space and finds out the practical value of the chosen three angles for determining the kinematic characteristics of the motion of a rigid body and its individual points, if the laws of change of these angles are given in time.

Известно, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три вращательных степени свободы и его положение в пространстве однозначно определяется тремя независимыми друг от друга углами [1,2].

Вопрос выбора трех углов имеет важное практическое значение при исследовании вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Убедимся в этом на примере рассмотрения двух различных способов выбора трех углов.

Сначала рассмотрим простейший способ выбора трех углов. Пусть твердое тела вращается вокруг неподвижной точки O (рис. 1). Свяжем с точкой O неподвижную систему координат $Oxyz$ (с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$).

Проводим через неподвижную точку O ось Ol, жестко связанную с твердым телом. Положение оси Ol в неподвижной системе координат задаем двумя углами α и β с координатными осями Ox и Oy. Для задания положения твердого тела к этим двум углам добавляем третий угол φ – поворота твердого тела вокруг оси Ol.

Таким образом выбранная система углов α, β, φ фиксирует положение твердого тела с одной неподвижной точкой в системе координат $Oxyz$, а значит, однозначно определяет его положение в ней.

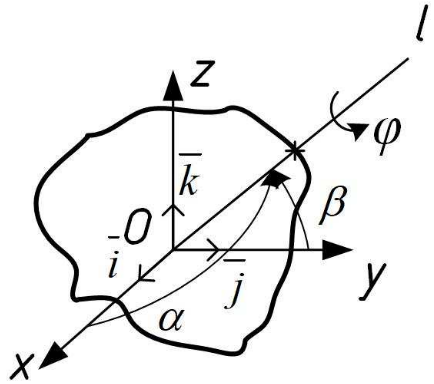

Рис. 1.

Выясним возможности выбранной системы трех углов α, β, φ для определения кинематических характеристик движения твердого тела и его отдельных точек, если известны функции

$$\alpha = f_1(t), \beta = f_2(t), \varphi = f_3(t), \qquad (1)$$

т.е. когда задан закон вращения твердого тела вокруг неподвижной точки.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной точки кинематическими характеристиками движения твердого тела являются его абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}$ и абсолютное угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$.

И так, если известны функции (1) то, беря первые производные по времени от этих функций, определяем значения угловых скоростей, с которыми твердое тело будет вращаться вокруг трех подвижных осей, которые для углов α, β, φ являются собственными осями.

Абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}$ вращения определяется векторной суммой полученных трех угловых скоростей. Однако, из трех подвижных осей известно направление только одной оси Ol в неподвижной системе координат, которое задается углами α и β. Так как неизвестны направления остальных двух подвижных осей, а, следовательно, и направления векторов угловых скоростей вращения вокруг них, то нельзя найти проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ абсолютной угловой скорости $\overline{\omega}$ на оси неподвижной системы координат, следовательно, нельзя определить вектор $\overline{\omega}$.

Так как, вектор абсолютного углового ускорения определяется по формуле

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

то, очевидно и этот параметр вращения твердого тела вокруг неподвижной точки определить нельзя.

Линейная скорость $\overline{v}$ и линейное ускорение $\overline{a}$ точек твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной точки, определяются по формулам

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \qquad (2)$$

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}), \qquad (3)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор положения точки M твердого тела относительно неподвижной точки O в неподвижной системе координат.

В свою очередь, из формул (2) и (3) следует, что линейные скорость $\bar{v}$ и ускорение $\bar{a}$ точек твердого тела не могут быть найдены, так как неизвестны векторы абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$ и абсолютного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$.

Таким образом, рассмотренный способ выбора трех углов α,β,φ оказывается полезным только для пояснения наличия у твердого тела с одной неподвижной точкой трех степеней свободы и необходимости выбора трех углов, которые будут однозначно определять положение твердого тела с одной неподвижной точкой в трехмерном евклидовом векторном пространстве.

А теперь рассмотрим другой, более сложный способ выбора трех углов, который в свое время был указан Эйлером. Эйлер ввел в рассмотрение три угла: угол прецессии ψ, угол нутации θ и угол собственного вращения φ. Эти углы получили название углов Эйлера или эйлеровых углов. Известны три основных принципа правильного выбора углов Эйлера [3]. Согласно этим принципам в рассмотрение вводятся две системы координат: неподвижная и подвижная, последовательность задания углов ψ,θ,φ не меняется, меняется только выбор осей, вокруг которых осуществляются повороты на эти углы.

Для случая, когда подвижная система координат жестко связана с твердым телом, соблюдение основных принципов правильного выбора эйлеровых углов, позволяет получать 12 систем углов Эйлера, которые задают 12 различных способов поворота твердого тела вокруг неподвижной точки.

Для рассмотрение одного из поворотов твердого тела вокруг неподвижной точки с помощью правильно заданных эйлеровых углов, введем в рассмотрение две ортонормированные системы координат: неподвижную $Oxyz$ (орты $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$) и подвижную $Ox'y'z'$ (орты $\bar{I},\bar{J},\bar{K}$), жестко связанную с твердым телом.

В этом случае рассмотрение вращения твердого тела вокруг неподвижной точки можно свести к рассмотрению поворота подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ (рис. 2).

В качестве основных осей выберем оси Oz и Oz', принадлежащие неподвижной и подвижной системам координат. Так как оси одноименные, угол между ними будет равен углу нутации θ.

Поворот подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ будем осуществлять в три этапа: первый поворот подвижной системы координат (после поворота подвижная система координат будет иметь обозначение $Ox_1y_1z_1$) относительно неподвижной $Oxyz$ на угол прецессии ψ вокруг первой основной оси Oz; второй поворот подвижной системы координат (после поворота подвижная система координат будет иметь обозначение $Ox_2y_2z_2$) относительно подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ на угол нутации θ вокруг линии узлов OK, положительное направление которой совпадает с положительным направлением оси Ox; третий поворот подвижной системы координат (после поворота подвижная система координат будет иметь обозначение $Ox'y'z'$) относительно подвижной системы координат $Ox_2y_2z_2$ на угол собственного вращения φ вокруг второй основной оси Oz'.

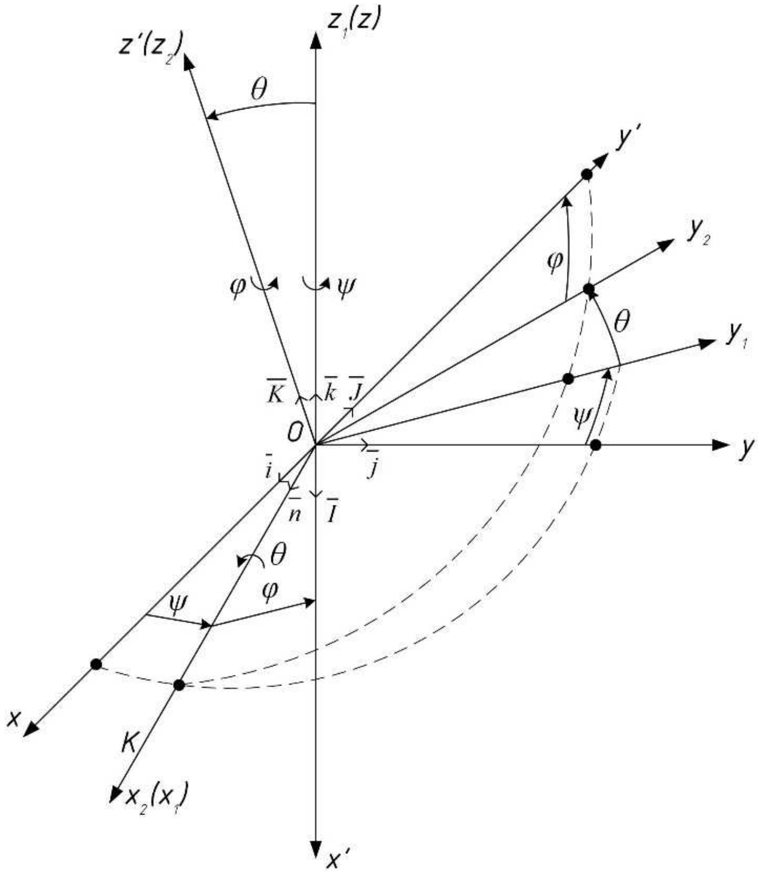

Рис. 2

Положение оси Oz' однозначно фиксируется в неподвижной системе координат $Oxyz$ двумя углами ψ и θ. Для фиксации положения твердого тела с одной неподвижной точкой к этим двум углам добавляется угол φ – собственного вращения твердого тела вокруг оси Oz'. Выбранные три угла фиксируют, а значит и однозначно определяют положение твердого тела с одной неподвижной точкой в неподвижной системе координат.

Выясним возможности, которые дает правильный выбор углов Эйлера для определения абсолютной угловой скорости $\overline{\omega}$ вращения вокруг неподвижной точки, если известны функции

$$\psi = f_1(t), \theta = f_2(t), \varphi = f_3(t) \tag{4}$$

Абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}$ определяется векторной суммой угловых скоростей, составляющих вращений

$$\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k} + \dot{\theta}\overline{n} + \dot{\varphi}\overline{K}, \tag{5}$$

где $\dot{\psi}\overline{k}$ – угловая скорость прецессии;

$\dot{\theta}\overline{n}$ – угловая скорость нутации;

$\dot{\varphi}\overline{K}$ – угловая скорость собственного вращения.

Значения угловых скоростей составляющих вращений находятся по формулам

$$\dot{\psi}=\frac{d\psi}{dt};\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt};\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt} \qquad (6)$$

Направлены векторы угловых скоростей составляющих вращений вдоль осей, положение которых известно в неподвижной системе координат.

И так, вектор угловой скорости прецессии $\dot{\psi}\bar{k}$ направлен по оси прецессии, совпадающий с неподвижной осью Oz. Вектор угловой скорости нутации $\dot{\theta}\bar{n}$ направлен по оси нутации, которой является линия узлов OK, совпадающая с положительным направлением оси Ox_1, положение которой, в свою очередь, определяется углом прецессии ψ, отсчитанным от оси Ox в горизонтальной координатной плоскости Oxy. Вектор угловой скорости собственного вращения $\dot{\varphi}\bar{K}$ направлен по оси собственного вращения, совпадающий с положительным направлением оси Oz' подвижной системы координат $Ox'y'z'$. Положение оси Oz' задается углом нутации θ, отсчитанным от оси Oz_1, совпадающей с осью Oz неподвижной системы координат $Oxyz$.

Зная значения и направления векторов угловых скоростей $\dot{\psi}\bar{k},\dot{\theta}\bar{n},\dot{\varphi}\bar{K}$, находятся проекции абсолютной угловой скорости, как на оси неподвижной $\omega_x,\omega_y,\omega_z$, так и на оси подвижной $\omega_{x'},\omega_{y'},\omega_{z'}$, систем координат, проецируя векторное равенство (5) на эти оси.

Так как в трехмерном евклидовом пространстве при вращении сохраняются модули векторов, то значение абсолютной угловой скорости определяется из равенства

$$\omega=\sqrt{\omega_x{}^2+\omega_y{}^2+\omega_z{}^2}=\sqrt{\omega_{x'}{}^2+\omega_{y'}{}^2+\omega_{z'}{}^2}.$$

Зная проекции абсолютной угловой скорости на оси неподвижной и подвижной систем координат, находятся проекции вектора абсолютного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ на эти оси [4] и определяется значение абсолютного углового ускорения из равенства

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+\varepsilon_z{}^2}=\sqrt{\varepsilon_{x'}{}^2+\varepsilon_{y'}{}^2+\varepsilon_{z'}{}^2}.$$

Направления векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ в неподвижной и подвижной системах координат определяются с помощью направляющих косинусов.

Так как подвижная система координат жестко связана с твердым телом, то в подвижной системе координат можем говорить только о положении точек твердого тела. В неподвижной системе координат можем говорить о положении точек твердого тела, их законе движения, траектории движения, скоростях и ускорениях движения.

Тогда, зная значения и направления векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, находятся линейные скорости $\bar{v}$ и линейные ускорения $\bar{a}$ движения точек твердого тела по формулам (2) и (3), проецируя эти векторные равенства на оси неподвижной системы координат.

А для нахождения закона движения точек твердого тела в неподвижной системе координат, при его вращении вокруг неподвижной точки, т.е. для получения зависимостей

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

рассмотрим математическое описание поворота подвижной системы координат относительно неподвижной в матричной форме.

Известно, что при вращении в трехмерном евклидовом векторном пространстве сохраняется значение модулей векторов, углы между ними и сохраняется относительная ориентация любых трех базисных векторов (орт).

Благодаря этим свойствам пространства, во-первых, поворот одной системы координат относительно другой можно математически описывать с помощью матрицы преобразований или матрицы поворота $A \equiv [a_{ij}], i, j = 1,2,3$, коэффициенты которой a геометрически являются косинусами углов между ортами старой подвижной и повернутыми ортами новой подвижной систем координат; во-вторых, полученная матрица поворота позволяет устанавливать зависимости между проекциями векторов в двух системах координат.

При заданном законе вращения твердого тела, т.е., когда известны функции

$$\psi = f_1(t), \theta = f_2(t), \varphi = f_3(t),$$

для каждой системы эйлеровых углов может быть получена своя матрица поворота $A = A(t)$.

Тогда радиус-вектор $\bar{r}$ положения точки M твердого тела в неподвижной системе координат будет связан с радиус-вектором $\bar{\rho}$ положения точки M в подвижной системе координат в матричной форме формулой

$$\bar{r} = A^T \bar{\rho},$$

где $\bar{r} = \bar{\rho} = \overline{OM}; \bar{r} = [xyz]^T; \bar{\rho} = [x'y'z']^T$; $\overline{OM}$ – вектор, который определяет положение точки M твердого тела относительно неподвижной точки O; A^T – матрица, транспонированная к матрице поворота $A = A(t)$.

Таким образом, при найденной матрице поворота $A = A(t)$ можно найти закон движения точки M $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ и оценить траекторию ее движения на сфере радиуса

$$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

в неподвижной системе координат.

И так, рассмотренная система правильных углов Эйлера однозначно определяет положение твердого тела с одной неподвижной точкой в пространстве и при заданном законе изменения этих углов во времени, позволяет определять кинематические характеристики движения твердого тела и его отдельных точек.

Заключение

В итоге исследования двух различных способов задания трех углов, которые однозначно определяют положение твердого тела с одной неподвижной точкой в пространстве, выявлено, что не каждая система трех углов, которая однозначно определяет положение твердого тела в пространстве, при заданном законе изменения этих углов во времени, позволяет определять кинематические характеристики движения твердого тела и его отдельных точек; практическая ценность правильного задания углов Эйлера заключается в том, что эти углы не только однозначно определяют положение твердого тела с одной неподвижной точкой в пространстве, но и при заданном законе изменения этих углов во времени, позволяют решать задачу кинематики твердого тела в полном объеме: находить абсолютную угловую скорость и абсолютное угловое ускорение вращения твердого тела, определять скорость и ускорения движения точек твердого тела, находить закон изменения координат точек во времени и оценивать траекторию их движения в неподвижной системе координат.

Статья может быть полезна студентам, аспирантам и преподавателям технических высших учебных заведений при изучении кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Список литературы

1. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1968. – 624 с.
2. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.
3. Лойцанский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том 1. Статика и кинематика. – М.: Изд-во «Наука», 1982. – 352 с.
4. Орлянская Т.И. Определение углового ускорения при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 84, Ч. 1. – С. 103-107. – doi.org/10.18411/trnio-04-2022-24.

Сведения об авторе:
Орлянская Тамара Ивановна – к.т.н., доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика».