УДК 531/534:001.8 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2023-11-23-27

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. ПРАВИЛЬНЫЙ ВЫБОР УГЛОВ ЭЙЛЕРА

Орлянская Т.И.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва

Ключевые слова: абсолютно твердое тело, неподвижная точка, теория движения, углы Эйлера, системы углов Эйлера, матрицы поворота.

Аннотация. В статье рассматриваются основные принципы правильного выбора, один из выборов трех углов Эйлера, задающих поворот абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки в трехмерном евклидовом векторном пространстве, и рассматривается математическое описание поворота твердого тела вокруг неподвижной точки с помощью выбранных углов Эйлера в матричной форме при заданном законе вращения твердого тела.

ROTATION OF A RIGID BODY AROUND A FIXED POINT. CORRECT CHOICE OF EULER ANGLES

Orlyanskaya T.I.
Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Keywords: absolutely rigid body, fixed point, theory of motion, Euler angles, Euler angle systems, rotation matrices.

Abstract. The article discusses the basic principles of the correct choice, one of the choices of three Euler angles that define the rotation of an absolutely rigid body around a fixed point in three-dimensional Euclidean vector space, and considers the mathematical description of the rotation of a rigid body around a fixed point using the selected Euler angles in matrix form for a given law rigid body rotation.

При изучении курса теоретической механики в техническом вузе важной является тема: «Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки». Теория этого вида движения твердого тела имеет большое практическое значение. Она используется в гироскопии, в динамике корабля, самолета, ракеты, в движении небесных тел. В связи с этим возникает потребность более полного раскрытия отдельных вопросов этой теории.

Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы и его положение в трехмерном евклидовом векторном пространстве однозначно определяется тремя углами [1, 2]. Правильный способ выбора трех углов имеет важное значение, так как эти углы должны не только однозначно определять положение твердого тела с одной неподвижной точкой в пространстве, но и позволять вычислять кинематические характеристики движения твердого тела и его отдельных точек. Рассмотрим один из способов правильного выбора трех углов, который в свое время был указан Эйлером. Он ввел в рассмотрение три угла: угол прецессии ψ, угол нутации θ, угол собственного вращения φ. Эти углы получили название углов Эйлера или эйлеровых углов.

Известны три основных принципа правильного выбора углов Эйлера [3]. Для их рассмотрения свяжем с твердым телом две ортонормированные системы координат: неподвижную $Oxyz$ (орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) и подвижную $Ox'y'z'$ (орты $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$). Будем рассматривать случай, когда подвижная система координат жестко связана с телом. Тогда рассмотрение вращения твердого тела вокруг неподвижной точки можно свести к рассмотрению поворота подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$. Основные принципы правильного выбора эйлеровых углов заключаются в следующем:

1. Выбираются две основные оси, принадлежащие системам координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Это могут быть как одноименные, так и разноименные оси. Если оси одноименные, то угол между основными осями равен углу нутации θ, если оси разноименные, то угол между основными осями равен $\frac{\pi}{2} \pm \theta$.

2. Плоскости перпендикулярные основным осям также называются основными. В пересечении они образуют прямую линию, сообщив этой прямой положительную сторону отсчета, получаем линию узлов. Угол нутации θ будем отсчитывать в положительном направлении вокруг линии узлов.

3. В системах координат наряду с основными осями выбираются еще отсчетные оси. Угол между первой отсчетной осью, принадлежащей неподвижной системе координат $Oxyz$, и линией узлов, отсчитанный в положительном направлении вокруг первой основной оси, принадлежащей также неподвижной системе координат $Oxyz$, является углом прецессии ψ. Угол между линией узлов и второй отсчетной осью подвижной системы координат $Ox'y'z'$, отсчитанный в положительном направлении вокруг второй основной оси подвижной системы координат $Ox'y'z'$ является углом собственного вращения φ.

Из рассмотренных принципов следует, что поворот подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ осуществляется в три этапа:

первый – поворот подвижной системы координат (обозначим ее $Ox_1y_1z_1$) на угол прецессии ψ вокруг первой основной оси;

второй – поворот подвижной системы координат (обозначим ее $Ox_2y_2z_2$) относительно подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ на угол нутации θ вокруг линии узлов;

третий – поворот подвижной системы координат (обозначим ее $Ox'y'z'$) на угол собственного вращения φ вокруг второй основной оси.

При этом порядок выбора углов поворота ψ, θ, φ не меняется. Меняется только порядок выбора осей, вокруг которых осуществляются повороты на эти углы. В зависимости от выбора осей поворота, для нашего случая, когда подвижная система координат жестко связана с телом, получается 12 различных способов поворота подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ с использованием углов Эйлера. Так как последовательность поворота на углы ψ, θ, φ не меняется, а меняются только оси, вокруг которых осуществляются эти повороты, можно ввести буквенное обозначение систем поворота по наименованию осей, вокруг которых происходят последовательные повороты на эти углы.

Тогда в буквенном обозначении эти полученные системы эйлеровых углов имеют вид: zx_1z', zx_1y', zy_1x', zy_1z', yx_1y', yx_1z', yz_1x', yz_1y', xy_1x', xy_1z', xz_1x', xz_1y'. Где первая буква – основная ось, вокруг которой осуществляется поворот на угол прецессии ψ, вторая – ось, принятая за линию узлов, вокруг которой осуществляется поворот на угол нутации θ и третья – ось, вокруг которой осуществляется поворот на угол собственного вращения φ. Из 12 полученных систем эйлеровых углов, 6 имеют одноименные основные оси: yx_1y', yz_1y', xy_1x', xz_1x', zx_1z', zy_1z' и 6 – разноименные основные оси: yx_1z', yz_1x', xy_1z', xz_1y', zx_1y', zy_1x'.

Для математического описания поворотов подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ с помощью углов Эйлера используем матрицы преобразований $A \equiv [q_{ij}]$; $i, j = 1,2,3$. Геометрически коэффициенты матрицы a_{ij} являются косинусами углов между ортами старой подвижной и повернутыми ортами новой подвижной систем координат. Матрицы преобразований еще называются матрицами направляющих косинусов или матрицами поворота.

Рассмотрим, как на практике осуществляется поворот подвижной системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной $Oxyz$ на примере одной из полученных систем эйлеровых углов – zx_1z' и, как математически описывается этот поворот в матричной форме. Следует отметить, что система углов Эйлера – zx_1z' широко используется для описания движения небесных тел и в гироскопии. Она имеет одноименные основные оси Oz и Oz', угол между которыми равен углу нутации θ. Отсчетными осями являются оси Ox и Ox', принадлежащие неподвижной $Oxyz$ и подвижной $Ox'y'z'$ системам координат. Поворот подвижной системы координат относительно неподвижной осуществляется в три этапа: первый поворот – на угол прецессии ψ вокруг первой основной оси Oz; второй поворот – на угол нутации θ вокруг линии узлов OK, положительное направление которой совпадает с положительным направлением оси Ox; третий поворот – на угол собственного вращения φ вокруг второй основной оси Oz' (рис. 1).

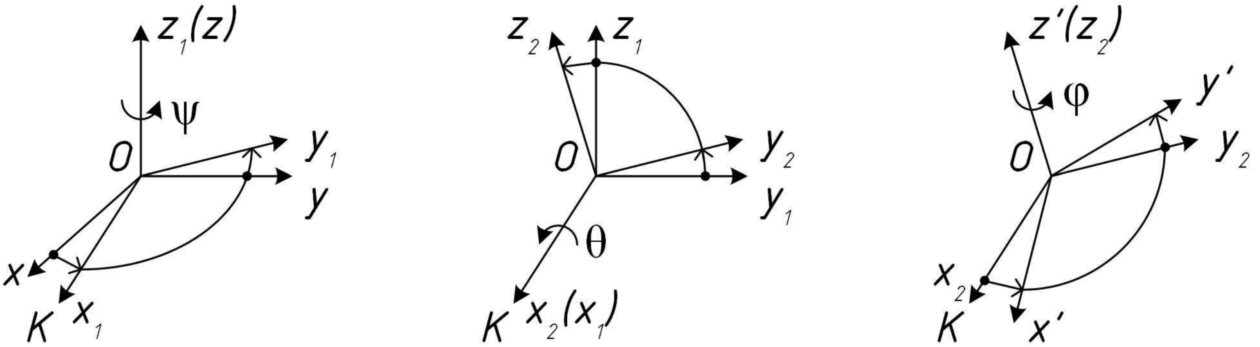
Каждому повороту подвижной системы координат соответствует своя матрица поворота $A_\psi, A_\theta, A_\varphi$:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{pmatrix}; A\varphi = \begin{pmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для краткости записи вместо самих тригонометрических функций указаны лишь первые буквы их названий.

В результате первых двух поворотов подвижной системы координат, для нашего случая, когда подвижная система координат жестко связана с телом, матрица поворота имеет вид:

$$A_{\theta\psi}=A_{\theta}A_{\psi}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & s\theta\\ 0 & -s\theta & c\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\psi & s\psi & 0\\ -s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\psi & s\psi & 0\\ -s\psi c\theta & c\psi c\theta & s\theta\\ s\psi s\theta & -c\psi s\theta & c\theta\end{pmatrix}.$$



$$Oxyz\xrightarrow[Oz]{\psi}Ox_1y_1z_1\xrightarrow[Ox_1]{\theta}Ox_2y_2z_2\xrightarrow[Oz']{\varphi}Ox'y'z'$$

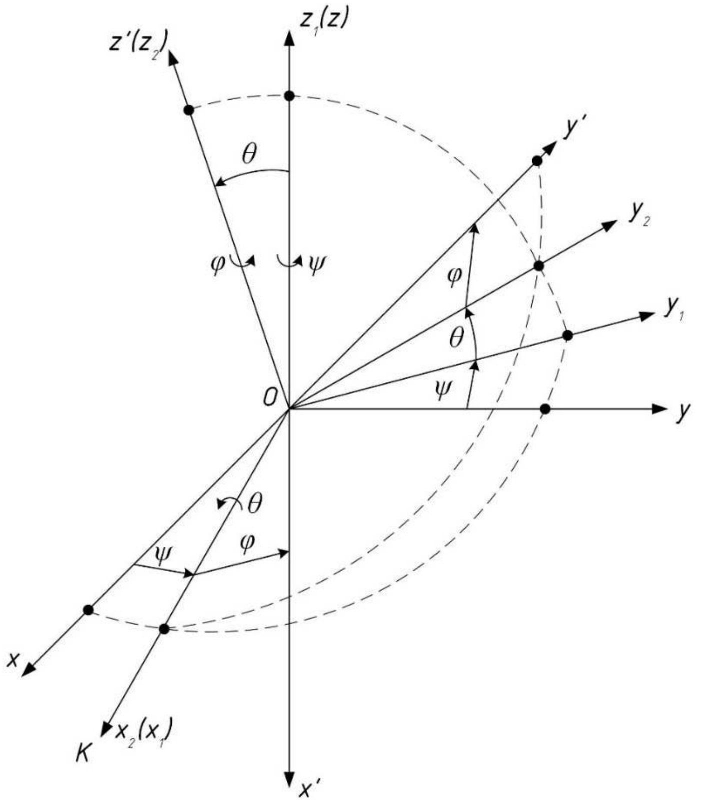


Рис. 1.

Матрицы при умножении свойством коммутативности не обладают, поэтому матрица нового поворота на угол θ идет в строку, а матрица старого поворота на угол ψ идет в столбец.

Результирующая матрица A поворота подвижной системы координат относительно неподвижной имеет вид:

$$A=A_{\varphi}A_{\theta}A_{\psi}=A_{\varphi}A_{\theta\psi}=\begin{pmatrix}c\psi c\varphi-s\psi c\theta s\varphi & s\psi c\varphi+c\psi c\theta s\varphi & s\theta s\varphi\\ -c\psi s\varphi-s\psi c\theta c\varphi & -s\psi s\varphi+c\psi c\theta c\varphi & s\theta c\varphi\\ s\psi s\theta & -c\psi s\theta & c\theta\end{pmatrix}.$$

В задачах гироскопии, при малых значениях угла нутации θ (в частности для «карданова подвеса» $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$), матрица поворота A принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} c\psi c\varphi - s\psi s\varphi & s\psi c\varphi + c\psi s\varphi & 0 \\ -c\psi s\varphi - s\psi c\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя основные формулы тригонометрии для функции суммы двух углов, получаем

$$A = \begin{pmatrix} c(\psi + \varphi) & s(\psi + \varphi) & 0 \\ -s(\psi + \varphi) & c(\psi + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице поворота вышел линейный угол $(\psi + \varphi)$ равный сумме двух углов между осями Ox и Ox'. Линейный угол может быть мал, когда ось Ox' стремится к оси Ox, но слагаемые по отдельности могут иметь большие значения.

И так, полученная матрица поворота показывает, что рассмотренная система эйлеровых углов (zx_1z') описывает такой вид вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, при котором при малых углах нутации θ твердое тело может иметь большие углы прецессии ψ и собственного вращения φ, что как раз и требуется для описания движения гироскопа [4].

Выводы

1. Рассмотренные три принципа правильного выбора углов Эйлера позволяют для случая, когда подвижная система координат жестко связана с телом, получать 12 различных систем эйлеровых углов, которые описывают 12 различных способов поворота твердого тела вокруг неподвижной точки.
2. При заданном вращении твердого тела вокруг неподвижной точки для каждой системы углов Эйлера получают свою матрицу поворота.
3. Матрица поворота позволяет оценивать возможные диапазоны совместного изменения эйлеровых углов.

Статья может быть полезна студентам, аспирантам и преподавателям технических высших учебных заведений при изучении кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Список литературы

1. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1968. – 624 с.
2. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.
3. Лойцанский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том 1. Статика и кинематика. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
4. Магнус К. Гироскоп: теория и применение. – М.: Изд-во «Мир», 1974. – 526 с.

Сведения об авторе:
Орлянская Тамара Ивановна – к.т.н., доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика».