УДК 517.97 : 51-74 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2023-11-18-22

РАВЕНСТВО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Бохонский А.И.[1], Варминская Н.И.[2], Мозолевская Т.В.[2]
[1]Севастопольский государственный университет;
[2]Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова
Севастополь

Ключевые слова: определенный интеграл, его свойства, функционалы движения объектов, эквивалентные преобразования интегралов.

Аннотация. По доказанному свойству определенных интегралов с различными подынтегральными функциями на примере задачи реверсионного восстановления функционалов показано, что пределы интегрирования, при которых интегралы с непрерывными подынтегральными функциями равны, находятся как корни уравнения первообразных. Алгоритм преобразований может быть использован для замены одного типа управления другим – эквивалентным, облегчающим, например, практическую реализацию управления движением объекта.

EQUALITY OF INTEGRALS WITH DIFFERENT INTEGRAL FUNCTIONS

Bokhonsky A.I.[1], Varminskaya N.I.[2], Mozolevskaya T.V.[2]
[1]Sevastopol State University;
[2]P.S. Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol

Keywords: integral, its properties, functionals of objects motion, equivalent transformations of integrals.

Abstract. By the proven property of definite integrals with different integrands, using the example of the task of reversive recovery of functionals, it is shown that the limits of integration under which the integrals with continuous integrands are equal are found as roots of the equation of antiderivatives. The transformation algorithm can be used to replace one type of control with another - equivalent, facilitating, for example, the practical implementation of object motion control.

Введение

Некоторые свойства неопределенного и определенного интегралов отражены в учебниках для высших технических учебных заведений [2, 3].

В [2], например, одно из свойств определенного интеграла от непрерывной функции гласит, что если $a < b$ и для подынтегральных функций выполняется соотношение $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_b^a f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

Определению интеграла и основам интегрального исчисления уделено внимание в математической энциклопедии [1].

Поиску экстремумов функционалов при решении задач оптимизации посвящены труды [4, 5]. В пособии [5] уделено внимание общей постановке задач оптимизации с целевой функцией в виде функционала.

Цель исследования – обоснование существования таких пределов интегрирования в интегралах с различными непрерывными подынтегральными функциями, при которых эти интегралы равны.

Свойство равенства определенных интегралов с различными подынтегральными функциями

Интегралы $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)dt$ и $\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)dt$ с различными непрерывными подынтегральными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равны между собой, если их пределы интегрирования t_1 и t_2 являются общими корнями уравнения первообразных $F_1(t) – F_2(t) = 0$.

Условие равенства первообразных неопределенных интегралов имеет вид:

$$F_1(t) + C_1 = F_2(t) + C_2, \tag{2}$$

или

$$F_1(t) - F_2(t) + C = 0. \tag{3}$$

Если известны значения пределов интегрирования t_1 и t_2, то должно выполняться равенство:

$$F_1(t_2) - F_1(t_1) = F_2(t_2) - F_2(t_1). \tag{4}$$

и, следовательно, $C = 0$.

Итак, из уравнения для первообразных

$$F_1(t) = F_2(t) \tag{5}$$

следуют значения пределов интегрирования t_1 и t_2, при которых выполняется равенство интегралов с различными подынтегральными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Наличие корней уравнения первообразных (5) подтверждает сосуществование в найденных точках равенства интегралов, отражающих формулу Ньютона-Лейбница.

Пример равенства интегралов, восстановленных реверсионно [6-8]

Движение материальной точки с массой $m = 1\,кг$ по прямой описывается функцией (график представлен на рис. 1)

$$x(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}, \tag{6}$$

которая является решением следующих уравнений

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2},\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

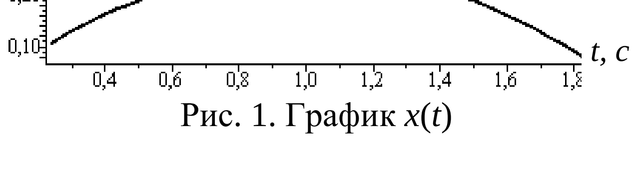

Рис. 1. График $x(t)$

Уравнения (7) можно рассматривать как первые вариации функционалов, которые восстанавливаются при использовании зависимостей

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{8}$$

Полагая (7) уравнениями Эйлера-Пуассона, согласно (8) получим:

$$J_1 = \int (v^2 + t \cdot v)dt\,;\; J_2 = \frac{1}{2}\int (v^2 - x)dt\,. \qquad (9)$$

В функционалах (9) подынтегральными функциями являются:

$$f_1(t) = \dot{x}^2 + t \cdot \dot{x}\,,\; \sqrt{f_2(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x)}\,. \qquad (10)$$

Ранее установлено, что определенные интегралы с непрерывными различными подынтегральными функциями равны между собой, если их пределы интегрирования t_1 и t_2 являются общими корнями уравнения первообразных $F_1(t) - F_2(t) = 0$, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)dt = 0\,. \qquad (11)$$

В приведенном примере:

$$F_1(t) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^3 - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4}\,,\; F_2(t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{24}t^3\,. \qquad (12)$$

Следовательно,

$$J = F_1(t) - F_2(t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^3 - \frac{5}{24}t^3 + \frac{3}{8}t^2\,. \qquad (13)$$

На рисунке 2 приведен график функции (13), подтверждающий существование трех корней:

$$t_1^* = -0{,}5725\,;\; t_2^* = 0{,}2380\,;\; t_3^* = 1{,}8345\,. \qquad (14)$$

С использованием функции *fsolve* (в Maple) также получены значение корней:

```
> fsolve({J}, t); {t = -0.5725513456}, {t
                     = 0.2380118015}, {t = 1.834539544}
```

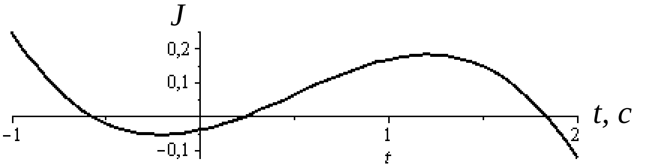

Рис. 2. График функции (13)

Действительно, при найденных численных значениях пределов интегрирования определенные интегралы равны между собой, например,

$$\int_{t_2^*}^{t_3^*} f_1(t)dt = \int_{t_2^*}^{t_3^*} f_2(t)dt = -0{,}1142\,. \qquad (15)$$

Графический образ функционалов

Использованы близкие к «скелетной кривой» функции, являющиеся решением уравнения Эйлера. Малый параметр изменяется в заданном поле экстремалей с близостью нулевого порядка:

$$x(t)=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}+\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}\right)\lambda, \qquad (16)$$

где λ – малый параметр (задан в пределах $0{,}1 \geq \lambda \geq -0{,}1$).

Графики функций $x(t)$, отображающих поле экстремалей при различных значениях параметра λ, изображены на рисунке 3. Средняя кривая построена при $\lambda = 0$, т.е. является скелетной кривой. В соответствии со значениями λ вычислены функционалы и аппроксимированы аналитическими функциями вида

$$J = a\lambda + b\lambda^2 - J_0, \qquad (17)$$

где a, b = *const*:

$$\begin{aligned} J_1^*(\lambda) &= 0{,}05\lambda + 8{,}33\cdot 10^7\cdot\lambda^2 - 8{,}33\cdot 10^7, \\ J_2^*(\lambda) &= -0{,}5\lambda + 1{,}67\cdot 10^8\cdot\lambda^2 - 1{,}67\cdot 10^8. \end{aligned} \qquad (18)$$

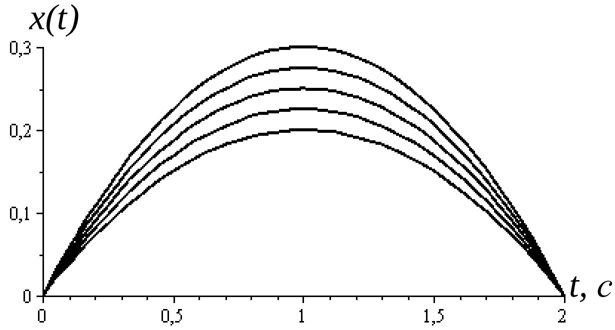

Рис. 3. Поле экстремалей в окрестности «скелетной функции» (средней кривой)

Графики функций подтверждают существование минимумов функционалов (рис. 4). Время движения, при котором функционалы ($J_1(T) = J_2(T)$) найдено с использованием свойства равенства определённых интегралов с различными подынтегральными функциями. Из

$$\int_0^T(\dot{x}^2 - x)dt - \int_0^T(\dot{x}^2 - t\dot{x})dt = 0 \qquad (19)$$

получено $T(4T^2 - 6T - 3) = 0$, один из корней T = 1,8956 с.

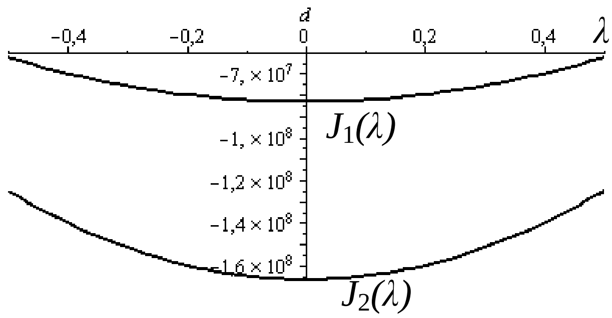

Рис. 4. Графики зависимости функционалов J_1 и J_2 от параметра λ варьирования функций

Для найденного времени движения функционалы $J_1 = J_2 = -0{,}09375$. С увеличением общего времени движения T объекта значения интегралов $J_1(T) < J_2(T)$ что свидетельствует о естественном соответствии функционала J_1 принципу наименьшего действия.

Заключение

1. Обосновано и на простом примере проиллюстрировано, что корни нелинейного алгебраического уравнения первообразных могут являться пределами интегрирования функционалов (определенных интегралов), при которых эти интегралы численно равны между собой. Восстановленные функционалы–критерии равны на временном интервале, который находится как корни нелинейного уравнения первообразных.

2. Отмеченное свойство определенных интегралов может использоваться в процедуре эквивалентной замены одного типа управления другим, более удобным в задачах практической реализации оптимального движения объекта.

Список литературы

1. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
2. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1974. – 520 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.– М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 548 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальное уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.
6. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
7. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – СПб.: НИЦ МС, 2020. – 120 с.
8. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Эквивалентные по энергоемкости управления движением объектов // Автоматизация и измерения в машино- приборостроении: науч. журнал. – 2021. – № 4(16). – С. 38-41.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»;

Варминская Наталья Ивановна – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин;

Мозолевская Татьяна Викторовна – к.т.н., доцент, профессор кафедры физики и общетехнических дисциплин.