

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЫШЦЫ ЧЕЛОВЕКА

Зимин А.И., Ратников Д.Р., Чабунин И.С.

Московское высшее общевойсковое командное училище, Москва

Ключевые слова: кинематические характеристики, мышцы, аналитические зависимости.

Аннотация. В статье рассматривается получение аналитических зависимостей для определения кинематических характеристик мышцы человека – ее укорочения и скорости укорочения, как функций времени. В основу выводов положено характеристическое уравнение Хилла зависимости силы тяги мышцы от скорости мышечного сокращения. В результате получено, что эти характеристики не зависят от упругих свойств мышцы.

ANALYTICAL DEPENDENCIES FOR DETERMINING THE KINEMATIC CHARACTERISTICS OF A HUMAN MUSCLE

Zimin A.I., Ratnikov D.R., Chabunin I.S.

Moscow higher military command school, Moscow

Keywords: kinematic characteristics, muscle, analytical dependencies.

Abstract. The article deals with obtaining analytical dependencies to determine the kinematic characteristics of a human muscle – its shortening and the rate of shortening, as functions of time. The conclusions are based on Hill's characteristic equation of the dependence of the traction force of the muscle on the speed of muscle contraction. As a result, it is obtained that these characteristics do not depend on the elastic properties of the muscle.

Как известно, в механике рассматриваются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. При этом не оговаривается, какие материальные тела являются ее объектом изучения. Предмет механики проникает практически во все сферы человеческой жизни, да и сам человек, как материальное тело, не является исключением: его физические возможности, движения, взаимодействие с другими материальными телами и пр. определяются и описываются законами механики.

Рассмотрим, например, механику сокращения человеческой мышцы. При физической подготовке курсантов, солдат, офицеров, спортсменов, при планировании и проведении тренировок с ними важно корректно представлять, как работают мышцы человека. А для понимания работы мышцы важно знать ее кинематические параметры, в частности, зависимость укорочения мышцы от времени и зависимость скорости укорочения мышцы от времени.

Найдем эти зависимости, пользуясь установленной А. Хиллом связью силы, развиваемой мышцей, и скорости укорочения мышцы (мышечного сокращения). Уравнение Хилла имеет вид [1]:

$$(F + a_1)(v + a_2) = a_2(F_0 + a_1), \quad (1)$$

где F – сила тяги мышцы; F_0 – максимальная сила тяги мышцы; v – скорость сокращения мышцы; a_1 , a_2 – константы.

Постоянные F_0 , a_1 , a_2 являются характеристиками конкретной мышцы конкретного человека и для различных людей различны.

Из уравнения (1) выразим силу F :

$$F(v) = \frac{a_2 F_0 - v a_1}{v + a_2}. \quad (2)$$

Примем справедливость для мышцы закона Гука $F = -kx$ (для интервала изменения длины мышцы, соответствующего изменению силы от нуля до максимального значения это справедливо [2]). Учитывая, что по определению скорость укорочения мышцы есть первая производная по времени от укорочения мышцы, перепишем соотношение (2) в виде:

$$-kx = \frac{a_2 F_0 - a_1 \frac{dx}{dt}}{a_2 + \frac{dx}{dt}}. \quad (3)$$

Соотношение (3) является дифференциальным уравнением относительно величины укорочения мышцы x . Решим это дифференциальное уравнение первой степени первого порядка с разделяющимися переменными, для этого перепишем его в виде:

$$-kx \frac{dx}{dt} - kx a_2 + a_1 \frac{dx}{dt} - a_2 F_0 = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$(a_1 - kx) \frac{dx}{dt} = kx a_2 + a_2 F_0, \quad (4)$$

Разделяя переменные в уравнении (4), запишем:

$$\frac{a_1 - kx}{a_2 F_0 + k a_2 x} dx = dt. \quad (5)$$

Возьмем интегралы от левой и правой частей соотношения (5):

$$\int \frac{a_1 - kx}{a_2 F_0 + k a_2 x} dx = \int dt. \quad (6)$$

Интеграл в левой части выражения (6) разобьем на два интеграла, в результате получим:

$$\int \frac{a_1}{a_2 F_0 + k a_2 x} dx - \int \frac{kx}{a_2 F_0 + k a_2 x} dx = \int dt. \quad (7)$$

Вычисляя интегралы, запишем:

$$\frac{a_1}{a_2 k} \ln(F_0 + kx) - \frac{1}{a_2 k} [F_0 + kx - F_0 \ln(F_0 + kx)] = t + C. \quad (8)$$

Раскроем квадратные скобки:

$$\frac{1}{a_2 k} [a_1 \ln(F_0 + kx) - (F_0 + kx) + F_0 \ln(F_0 + kx)] = t + C. \quad (9)$$

Последнее выражение можно несколько упростить, приведя подобные члены:

$$\frac{1}{a_2 k} [(a_1 + F_0) \ln(F_0 + kx) - (F_0 + kx)] = t + C. \quad (10)$$

Константу интегрирования найдем из начальных условий: в начальный момент времени укорочение равно нулю:

$$\frac{1}{a_2 k} [(a_1 + F_0) \ln F_0 - F_0] = C. \quad (11)$$

Подставим значение константы C из (11) в соотношение (10), в результате после тождественных преобразований получим:

$$\frac{a_1 + F_0}{a_2 k} \ln \left(1 + \frac{kx}{F_0} \right) - \frac{x}{a_2} = t. \quad (12)$$

Зависимость (12) является неявной функцией времени и устанавливает связь укорочения мышцы и времени.

При малых значениях укорочения мышцы функция $\ln \left(1 + \frac{kx}{F_0} \right) \approx \frac{kx}{F_0}$, тогда неявная функция (12) может быть представлена в явном виде:

$$x(t) \approx \frac{a_2 F_0}{a_1} t,$$

а скорость укорочения $\frac{dx}{dt}$ равна:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{a_2 F_0}{a_1}.$$

Ускорение при этом равно нулю.

Очевидно, что при малых значениях укорочения кинематические характеристики мышцы – укорочение как функция времени и скорость укорочения как функция времени не зависят от упругих свойств мышцы (величина k не входит в эти функции).

Таким образом, получено расчетное соотношение для определения кинематических характеристик мышцы – ее укорочения, как функции времени, так и скорости укорочения (для нахождения скорости достаточно продифференцировать функцию $x(t)$ пусть даже и в неявном виде), как функции времени.

Список литературы

1. Fenn W.O., Marsh B.S. Muscular force at different speeds of shortening // Journal Physiology. 1935, vol. 85, pp. 277-297.
2. Hill A.V. The heat of shortening and dynamic constant of muscle // Proceed Royal Society. London Serie B. 1938, vol. 126, pp. 136-195.
3. Зациорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: ФиС, 1981. – 143 с.
4. Физиология человека / Под ред. Н.В. Зимкина. – М.: ФиС, 1975. – 496 с.

Сведения об авторах:

Зимин Алексей Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин;

Ратников Даниил Романович – курсант;

Чабунин Игорь Сергеевич – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин.