

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОМПОЗИТА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ СЛОЕВ

Кадымов В.А.¹, Сосенушкин Е.Н.², Яновская Е.А.²

¹*Российский Университет транспорта «МИИТ»;*

²*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,
Москва*

Ключевые слова: вязкопластическое течение, двуслойная биметаллическая полоса, тонкий слой, свободное растекание полосы, давление на контакте.

Аннотация. В данной работе формулируется и решается задача о сжатии двухслойной биметаллической полосы, составленной из металлов с различными свойствами, в рамках модели жесткопластического тела. Математическое описание такой задачи в плоской постановке основано на составлении статически определимой системы, включающей дифференциальные уравнения квазистатического равновесия в частных производных, условие полной пластичности и уравнения Коши для деформаций. Решение задачи основано на следствиях из известной задачи Л. Прандтля.

EVALUATION OF THE STRESS STATE OF A BIMETALLIC COMPOSITE COMPOSED FROM DIFFERENT LAYERS

Kadymov V.A.¹, Sosenushkin E.N.², Yanovskaya E.A.²

¹*Russian University of Transport "MIIT";*

²*Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow*

Keywords: viscoplastic flow, two-layer bimetallic strip, thin layer, free spreading of the strip, contact pressure.

Abstract. In this work, the problem of compression of a two-layer bimetallic strip composed of metals with different properties is formulated and solved within the framework of a model of a rigid-plastic body. The mathematical description of such a problem in a flat setting is based on the compilation of a statically determinate system, including differential equations of quasistatic equilibrium in partial derivatives, the condition of complete plasticity, and the Cauchy equations for deformations. The solution of the problem is based on the consequences of the well-known problem of L. Prandtl.

Высокий уровень механических характеристик изготавливаемых машиностроительных деталей, связанный с увеличением их эксплуатационного ресурса, закладывается на этапе формообразования обработкой металлов давлением. Теория течения металла в тонком пластическом слое, наряду с процессами холодного деформирования, с успехом может быть применена и для процессов, протекающих в условиях горячей деформации [1]. Будем считать, что пластическое течение происходит только в «мягком» слое, а второй слой при этом остается «жестким». Слой с повышенной пластичностью назовем «мягким», второй слой с более высоким сопротивлением деформированию – «жестким» (рис. 1).

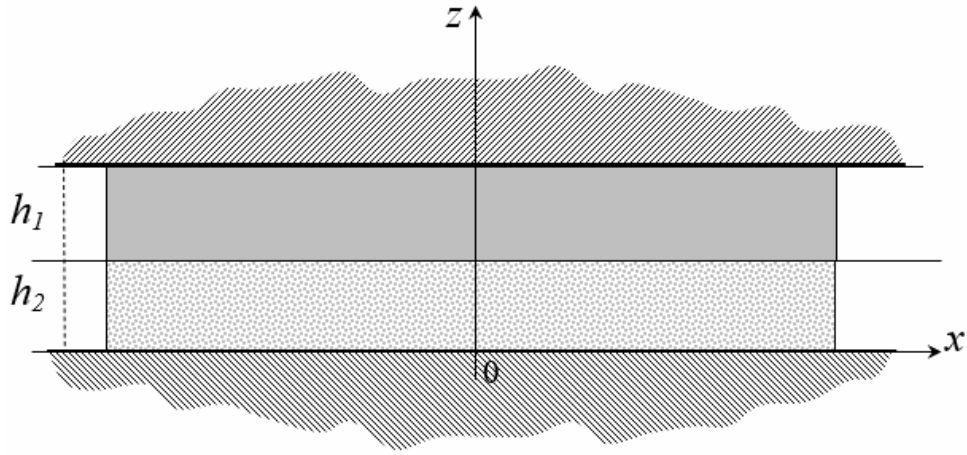


Рис.1. Пластическое сжатие биметаллического композита

С учетом принятых допущений замкнутая система уравнений краевой задачи будет иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2; \quad (2)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия в данной постановке формулируются следующим образом:

$$z = 0: \sigma_{xz} = \tau_{s1}; v = 0; \quad (5)$$

$$z = h_1(t): \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; v = -v_0 = \frac{dh_1(t)}{dx}. \quad (6)$$

Краевые условия на неизвестной свободной границе $F(x, y, z) \equiv 0$, которая в начальный момент времени задается соотношением:

$$F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0.$$

В случае, когда пластическое течение наблюдается только в одном слое, можно использовать решение задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине, т.е. $\tau_s = \tau_s(z)$ в изотермической постановке [2]:

$$\sigma_{xz} = az + b, \quad \sigma_{zz} = -ax - c_0, \quad \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2},$$

$$v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}} dz + c_1 \right).$$

Присвоим $\tau_s(z)$ постоянное значение:

$$\tau_s(z) = \tau_{s1} = \text{const}.$$

Константы a и b определяются из следующих граничных условий

$$z = 0: \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1(t): -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = ah_1 + b.$$

После решения системы, очевидно, получаем значения констант:

$$b = \tau_{s1}, a = -\frac{2\tau_{s1}}{h_1}.$$

Постоянную c_0 найдем из интегрального уравнения на свободной границе

$$x = \bar{l}, \bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(t)} - \text{условная средняя граница:}$$

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

Легко видеть, что:

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \approx \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1},$$

с учетом условия $\frac{h}{l} \ll 1$.

В результате, поле напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \tau_{s1} \left(-\frac{2z}{h_1} + 1 \right), \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0. \\ \sigma_{xx} &= \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1 \right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее находим общую силу для осуществления пластической осадки:

$$P_1 = \left| \int_{-T}^T \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-T}^T \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l} = \frac{4\tau_{s1}\bar{l}^2}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) - \frac{4\tau_{s1}\bar{l}^2}{h_1}. \quad (8)$$

Учтем условие, что

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}, \quad (9)$$

При выполнении этого условия прямая II располагается ниже прямой I (рис. 2), которое, в свою очередь, доказывает выполнимость условия $|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z)$ в области $0 < z < h_1$, расположения «мягкого» слоя.

Таким образом, в результате осадки биметаллической полосы, толщина пластического слоя h_1 уменьшается до некоторого значения h_{10} :

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_{10}} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_{10} + h_2}, \quad (10)$$

и дальше пластическое течение распространяется на весь объем биметаллической полосы.

Предположим, что теперь вся полоса по толщине охвачена пластической деформацией. Для этого случая можно воспользоваться решением (7), в котором

$$\tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, 0 < z < h_1, \\ \tau_{s2}, h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h \end{cases}; \tau_{s1} \leq \tau_{s2}.$$

Находим постоянные a и b из соответствующих условий на контакте:

$$z = 0 : \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1 + h_2 : -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a(h_1 + h_2) + b.$$

Решая составленную систему, находим

$$b = \tau_{s1}, a = -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}.$$

Напряжения в области течения могут быть найдены по соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}, \\ \sigma_{zz} &= \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)x - c_0, \\ \sigma_{xx} &= \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)x - c_0 + 2\sqrt{\tau_{s1}^2(z) - \left(-\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что условие $|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z)$ выполняется во всей области, занятой биметаллической полосой.

В рассматриваемом случае, прямая II располагается выше прямой I (рис. 3), то есть выполняется условие:

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1}. \quad (12)$$

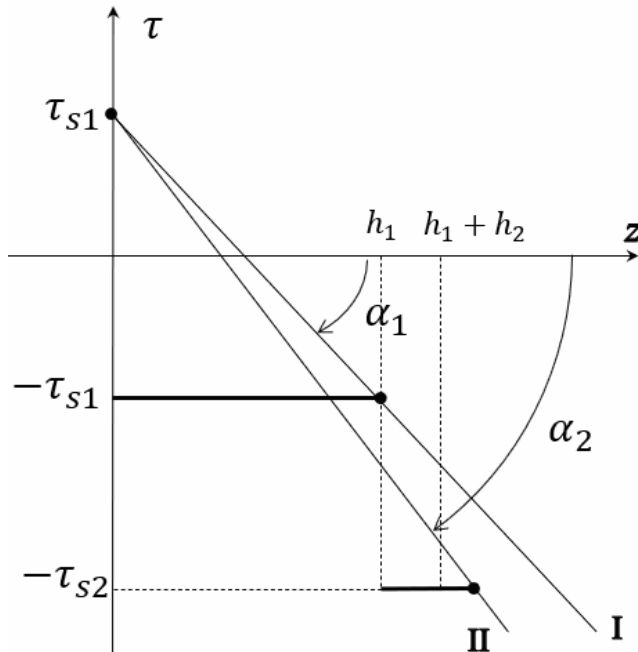


Рис. 2. Параметры течения в биметаллической полосе для случая 1

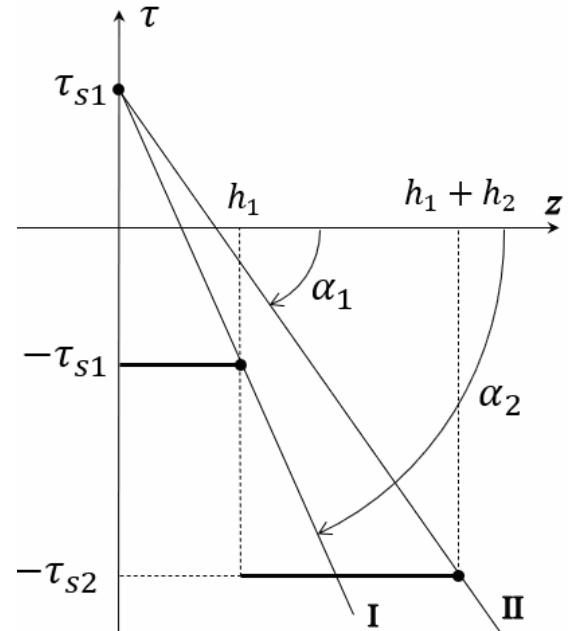


Рис. 3. Параметры течения в биметаллической полосе для случая 2

Утверждение. Условия (9) и (12) совпадают с условием, выведенным в работе [1] из принципа максимума мощности внешних сил: истинному положению границы течения неоднородного по толщине пластического слоя в данном состоянии соответствует минимуму мощности, необходимой для

перевода композита в пластическое состояние. При заданном законе сближения деформирующих инструментов минимуму мощности соответствует условие минимума внешних сил.

Для доказательства сформулированного утверждения достаточно вычислить необходимую силу для сжатия композита, соответствующую второму случаю, при условии, что вся биметаллическая полоса охвачена пластическим течением:

$$P_2 = \left| \int_{-T}^T \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-T}^T \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l}. \quad (13)$$

Найдем постоянную интегрирования c_0 , входящую в соотношение (13):

$$\begin{aligned} \int_0^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x=l, z) dz &= 0, \\ \int_0^{h_1} \left(\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) x - c_0 + 2\sqrt{\tau_{s1}^2(z) - \left(-\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) z + \tau_{s1} \right)^2} \right) dz &= 0; \\ c_0 &= \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l} \left(1 + O\left(\frac{h}{\bar{l}} \right) \right) - 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l}. \end{aligned}$$

где $O\left(\frac{h}{\bar{l}}\right)$ бесконечно малая одного порядка с $\frac{h}{\bar{l}}$. Подставим значение c_0 в (13):

$$P_2 = 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l} \left(1 + O\left(\frac{h}{\bar{l}} \right) \right) - 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l}. \quad (14)$$

Из соотношений (8) и (14) делаем заключение, что условию течения всей биметаллической полосы соответствует условие (12), которое совпадает с условием минимума внешних сил. Преобразуем условие (12) к виду

$$(\tau_{s1} + \tau_{s2})h_1 < 2\tau_{s1}(h_1 + h_2).$$

Или из анализа неравенства (15) можно сформулировать следующий вывод.

$$\frac{h_1}{h_2} < \frac{2}{\left(\frac{\tau_{s2}}{\tau_{s1}} \right) - 1}. \quad (15)$$

Будем считать, что τ_{s1} , τ_{s2} , h_1 известны. Это означает, что соотношение (15) накладывает ограничения на параметр h_2 : чем больше различие в пластических характеристиках материалов слоев, тем больше следует принять относительную толщину слоя, имеющего более высокий предел текучести. Условие (15) подтверждается результатами, полученными в работах [3, 5].

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
2. Kuznetsov A.I. // Archiwum Mech. Stos. 1960. vol. 2, no. 12, pp. 163-171.
3. Георгиевский Д.В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №1. – С. 47-59.

4. Победря Б.Е., Гузей И.Л. Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. – 1998. – №6. – С. 82-91.
5. Белов Н.А., Кадымов В.А., Сосенушкин Е.Н. Эксперимент и теория растекания тонкого пластического слоя в штампе прямоугольного сечения / Препринт №1100. Институт Проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. – 2015. – 23 с.
6. Кийко И.А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, №2. – С. 344-351.
7. Kadymov V.A., Sosenushkin E.N., Yanovskaya E.A. Exact solutions to an evolution equation of plastic layer flow on a plane // Moscow University Mechanics Bulletin. 2016, vol. 71, no. 3, pp. 69-72.

Сведения об авторах:

Кадымов Вагид Ахмедович – д.ф.-м.н., профессор;

Сосенушкин Евгений Николаевич – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой композиционных материалов;

Яновская Елена Александровна – к.т.н., доцент.