УДК 617.71, 62.752, 621.534, 629.4.015 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2022-10-47-55

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ И ФОРМ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ СВЯЗНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ СИЛОВОЙ ПРИРОДЫ

Елисеев А.В., Миронов А.С.
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: механическая колебательная система, колебания твердого тела, структурная математическая модель, передаточная функция, амплитудно-частотная характеристика, динамические состояния, формы динамических взаимодействий, динамические инварианты, резонансы, режимы динамического гашения колебаний, связные внешние возмущения, силовые возмущения.

Аннотация. В рамках задач оценки, контроля и формирования динамических состояний механических колебательных систем развивается подход регуляризации бесконечной совокупности динамических состояний системы с помощью разбиения на классы, обладающие постоянными характеристиками динамических инвариантов. Развиваемый подход использует методологию структурного математического моделирования, основанного на сопоставлении механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Для механической колебательной системы с двумя степенями свободы, образованной твердым телом, строятся динамические характеристики в зависимости от координаты точек твердого тела, рассматриваемой как фактор формирования динамического состояния. Показано, что совокупность динамических состояний точек поверхности твердого тела обладает структурой, определяемой областями различной чувствительности к характеру силового воздействия. Разработан метод построения динамических характеристик параметров механических колебательных систем для обобщенной оценки многообразия динамических состояний механической колебательной системы, образованной твердым телом, совершающим колебания в условиях связных силовых возмущений.

REGULARIZATION OF DYNAMIC STATES AND FORMS OF DYNAMIC INTERACTION OF POINTS OF A RIGID BODY OF A MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEM TAKING INTO ACCOUNT CONNECTED VIBRATIONAL LOADINGS OF A FORCE NATURE

Eliseev A.V., Mironov A.S.
Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: mechanical oscillatory system, solid body vibrations, structural mathematical model, transfer function, amplitude-frequency response, dynamic states, forms of dynamic interactions, dynamic invariants, resonances, modes of dynamic vibration damping, connected external disturbances, force disturbances.

Abstract. Within the framework of the tasks of evaluation, control and formation of dynamic states of mechanical oscillatory systems, an approach of regularization of an infinite set of dynamic states of the system is being developed by dividing into classes with constant characteristics of dynamic invariants. The developed approach uses the methodology of structural mathematical modeling based on the comparison of mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects, structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems. For a mechanical oscillatory system with two degrees of freedom formed by a solid, dynamic characteristics are constructed depending on the coordinates of the points of the solid, considered as a factor in the formation of a dynamic state. It is shown that the set of dynamic states of points on the surface of a solid body has a structure determined by areas of different sensitivity to the nature of force action. A method has been developed for constructing dynamic characteristics of parameters of mechanical oscillatory systems for a generalized assessment of the variety of dynamic states of a mechanical oscillatory system formed by a solid body oscillating under conditions of connected force disturbances.

Введение. В настоящее время значительное внимание уделяется вопросам оценки, контроля и формирования динамического качества взаимодействия элементов технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения [1, 2]. Необходимость в управлении динамическим состоянием технических объектов в условиях вибрационных нагружений предопределяет внимание к развитию научно-методологического базиса решения широкого круга модельных задач на основе единого подхода с целью создания обобщенных представлений о колебательных системах. В рамках методологии структурного математического моделирования механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [3, 4].

Методы структурного математического моделирования нашли широкое применение в задачах вибрационной защиты и виброизоляции. Наравне с задачами виброизоляции существенное развитие получили структурные подходы в решении задач оценки динамических состояний технических объектов с учетом дополнительных связей. Определенной спецификой обладают структурные подходы в оценке контактных взаимодействий составных элементов механических колебательных систем, допускающих нарушение неудерживающего контакта [5-7].

Системный подход в детализации представлений о динамических состояниях технических объектов находит своё развитие в формировании новых обобщений, связанных с возможностями регуляризации бесконечного семейства состояний и форм взаимодействий элементов системы, оцениваемого на основе амплитудно-частотных характеристик передаточных функций с помощью конечного набора динамических инвариантов [8]. Широкий класс задач оценки динамических состояний технических объектов в своей основе использует расчетные схемы в виде механических колебательных систем, образованных твердым телом, совершающим малые колебания относительно положения равновесия.

Вместе с тем, использование динамических инвариантов в рамках задач оценки динамических состояний совокупности точек твердого тела механических колебательных систем предполагает учет особенностей приложения внешних возмущений, что ещё не получило должной детализации представлений в рамках структурного подхода.

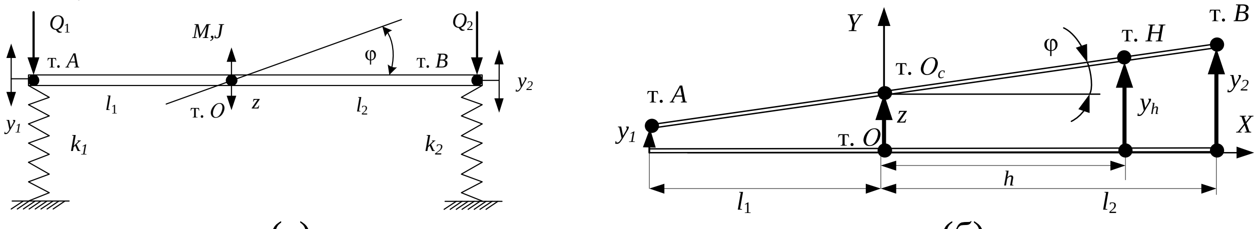
Предлагаемая статья посвящена разработке метода обобщенной оценки, контроля и формирования динамических состояний точек твердого тела в зависимости от координат точки при условии фиксированного коэффициента связности приложения внешних силовых возмущений.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом с массой M и моментом инерции J, установленном на упругие опоры с жесткостями k_1, k_2 (рис. 1).

Предполагается, что система совершает малые установившиеся колебания под воздействием приложенных к т.A и т.B связных гармонических синфазных возмущений Q_1, Q_2;

$$Q_2 = \gamma Q_1, \qquad (1)$$

где γ – коэффициент связности. Крепления упругих элементов реализуются в тт. A и B отстоящих на расстояниях l_1 и l_2 от центра тяжести т.O_c твердого тела. На линии AB твердого тела может быть выбрана произвольная точка т.H с координатой h (рис.1*б*). Для фиксированного коэффициента связности γ динамическое состояние твердого тела определяется частотой ω внешних возмущений.



(а) (б)

Рис.1. Механическая колебательная система: (а) – расчетная схема колебания твердого тела, (б) – расчетная схема смещения т.Н твердого тела

Амплитуды колебаний т.H твердого тела, в общем случае принимающие конечные и резонансные значения, и формы динамических взаимодействий, отображающие сонаправленности изменений координат точек и возмущающих сил, определяются коэффициентами связности γ и частотами ω силового возмущения. Для фиксированной т.H твердого тела и произвольного коэффициента связности γ совокупность динамических состояний обладает рядом особенностей, характеризуемых количеством режимов обнуления амплитуд колебаний координат объекта, резонансов и знакоопределенных форм динамических взаимодействий. Для оценки разнообразия бесконечной совокупности динамических взаимодействий, определяемой варьируемым коэффициентом связности, могут быть использованы динамические инварианты [9].

Задача заключается в разработке метода оценки совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий точек твердого тела с учетом их положения при условии фиксированного коэффициента связности внешних силовых возмущений.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений движения твердого тела может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода. В качестве двух равноправных систем обобщённых координат рассматриваются смещения $\{y_1, y_2\}$ тт. A и B относительно положения статического равновесия, и величины $\{\varphi, z\}$, где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, z – вертикальное смещение центра тяжести относительно положения статического равновесия. Используемые системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = y - l_1\varphi \\ y_2 = y + l_2\varphi \end{cases}, \tag{2}$$

где $a = \dfrac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \dfrac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \dfrac{1}{l_1 + l_2}$ (3)

На основе известных методов [10] механическая колебательная система (рис. 1*a*) может быть представлена структурной схемой (рис. 2).

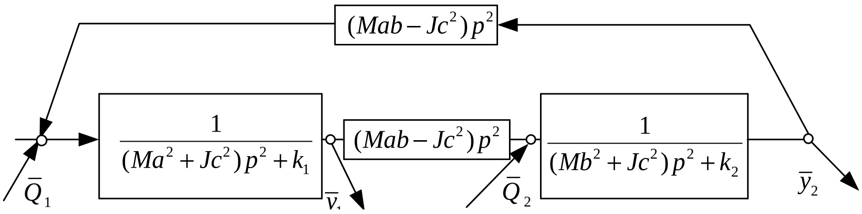


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на (рис.1); $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [11]

Динамические особенности движения твердого тела под действием внешних возмущений могут быть выражены с помощью передаточных функций системы, для которых силовое возмущение Q_1 рассматривается как входной сигнал, а смещения y_1 или y_2 – как выходной.

Вместе с тем, использование коэффициента связности γ и координаты h точки, динамическое состояние которой оценивается, приводит к необходимости рассмотрения бесконечного семейства передаточных функций. В качестве метода регуляризации может быть предложено разбиение бесконечного семейства передаточных функций на конечное множество классов, элементы которых обладают постоянными обобщенными особенностями.

III. Регуляризация динамических состояний семейства точек твердого тела с помощью частотной функции обнуления.

1. На основе структурной схемы (рис. 2) с учетом коэффициента связности γ может быть рассмотрено бесконечное семейство передаточных функции системы вида:

$$W_{11}(p,\gamma) = \left.\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \gamma(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \tag{4}$$

$$W_{21}(p,\gamma) = \left.\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\gamma - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \tag{5}$$

где $A(p)=((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)((Mb^2+Jc^2)p^2+k_2)-((Mab-Jc^2)p^2)^2$. (6)

С использованием передаточных функций W_{11} и W_{21} для оценки динамических состояний произвольной т.H твердого тела, расположенной на расстоянии h от центра тяжести т.O_C может быть построена передаточная функция:

$$W_h(p) = \left.\frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1 \neq 0}, \tag{7}$$

где координата y_h (рис.1*б*) определена с помощью выражения:

$$y_h = (a–hc)y_1 + (b+ch)y_2. \quad (8)$$

С учетом смещения y_h передаточная функция (7) принимает вид:

$$W_h(p)\Big|_{\bar{Q}_1=0} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1} = (a-ch)\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} + (b+ch)\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}. \quad (9)$$

Многообразие динамических состояний точек твердого тела для фиксированного коэффициента связности γ может быть оценено на основе, рассматриваемого в зависящего от координаты h, семейства амплитудно-частотных характеристик передаточных функций (9):

$$A_h(\omega,\gamma,h) = \frac{\bar{y}_h}{\bar{Q}_1}(p,\gamma,h)\Bigg|_{p=j\omega} \quad (10)$$

Зависящее от координаты h бесконечное семейство амплитудно-частотных характеристик может быть разбито на конечную совокупность классов, элементы которых обладают фиксированным числом частот резонанса, режимов обнуления амплитуд колебания, знакоопределенных форм динамического взаимодействия, с помощью частотной функции обнуления, рассматриваемой как функции h:

$$\omega^2(\gamma,h) = \frac{c(k_1\gamma - k_2)h + (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)h + Jc^2(\gamma+1)}. \quad (11)$$

С учетом коэффициента связности, принимающего фиксированное значение, частотные функции обнуления обладают различными аналитическими особенностями. Предполагается, что фиксированный коэффициент γ удовлетворяет условиям $k_1\gamma$-k_2>0 и $a\gamma$-b>0, при которых частотная функция обнуления имеет вид гиперболы с правой возрастающей ветвью(рис.3).

2. Частотная функция обнуления позволяет построить разбиение множества координат т.H на основе граничных значений координат h_1, h_2, h_0, h_{kr}, определяемых из условий:

$$\omega^2(\gamma,h_1) = \sigma_1^2, \quad (12) \qquad \omega^2(\gamma,h_2) = \sigma_2^2, \quad (13)$$

$$c(k_1\gamma - k_2)h_0 + (bk_1\gamma + ak_2) = 0, \quad (14) \qquad (Mac\gamma - Mbc)h_{kp} + Jc^2(\gamma+1) = 0. \quad (15)$$

где σ_1, σ_2 – собственные частоты системы.

Полученные на основе частотной функции обнуления граничные точки, находящиеся в отношении:

$$-\infty < h_2 < h_{\text{кр}} < h_0 < h_1 < \infty. \quad (16)$$

определяют конечное разбиение бесконечного множества значений координат:

$$\Gamma = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9, \quad (17)$$

где $I_1 = (-\infty, h_2)$, $I_2=\{h_2\}$, $I_3= (h_2, h_{\text{кр}})$, $I_4=\{h_{\text{кр}}\}$, $I_5=(h_{\text{кр}}, h_0)$), $I_6=\{h_0\}$, $I_7=(h_0, h_1)$, $I_8=\{ h_1 \}$, $I_9 =(h_1,\infty)$ – точечные и интервальные множества.

Согласно построению множеств I_k на основе частотной функции обнуления амплитудно-частотные характеристики обладает постоянным количеством резонансов, частот обнуления и форм взаимодействия (рис. 3). В частности, для точечного множества $I_8 = \{h_1\}$ на основе частотной функции и значений собственных частот системы могу быть определены интервалы знакопостоянства амплитудно-частотной характеристики (рис.3, I_8), для которой существует один резонанс, одна положительная и одна отрицательная форма динамического взаимодействия элементов и нет режимов динамического гашения (рис.3, $S^1{}_0F^1{}_1$).

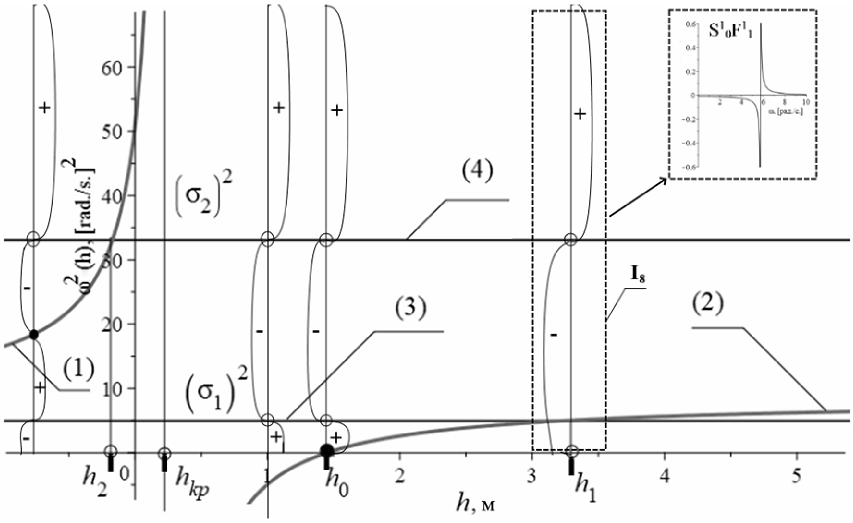
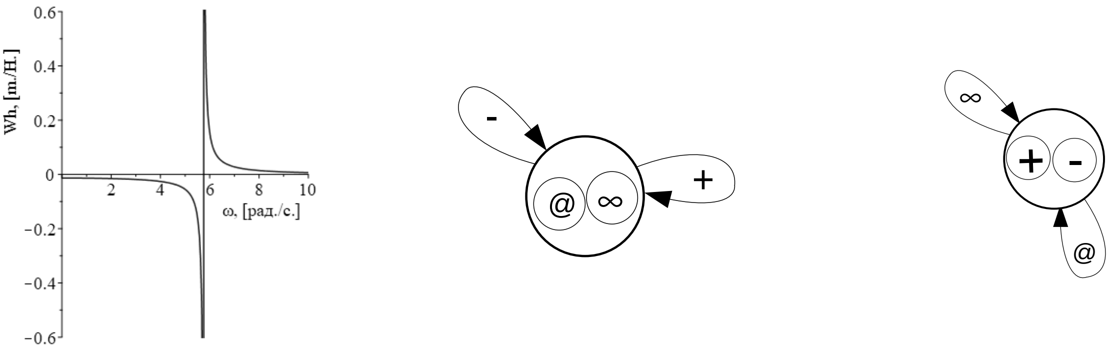


Рис. 3. Частотная функция обнуления для коэффициента связности γ=0: h_1, h_2, h_0, $h_{кр}$ – граничные значения координаты т. Н, 1 – левая ветвь частотной функции обнуления, 2 – правая ветвь частотной функции обнуления, 3 – первая собственная частота, 4 – вторая собственная частота

Каждой координате h может быть сопоставлена некоторая амплитудно-частотная характеристика (рис. 4*а*) и динамический инвариант (рис. 4б, рис. 4*в*), отображающий обобщенные свойства графиков амплитудно-частотных характеристик в виде количества резонансов, частот обнуления и количества знакопостоянных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы. В частности, для координаты h принадлежащей точечному множеству I_8 совокупность динамических состояния определяется амплитудно-частотной характеристикой (рис. 4*а*). Динамические особенности совокупности динамических состояний в виде одного резонанса могут быть представлены динамическими инвариантами с одним резонансом (рис. 4*в*) и двумя знакопостоянными формами динамических взаимодействий (рис. 4б). В унифицированной форме динамические особенности точки с координатой h=h_1 могут быть представлены записью $S^1{}_0F^1{}_1$ с интегральной характеристикой J_3.

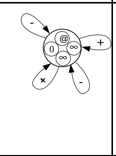
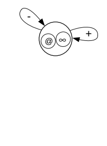
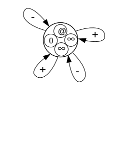
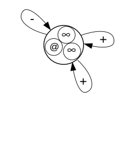
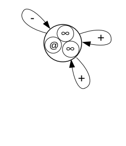
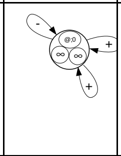
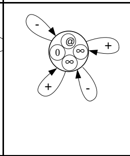
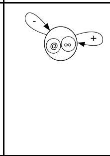
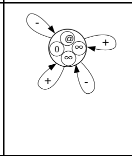
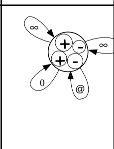
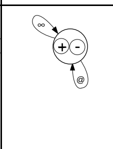
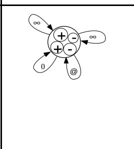
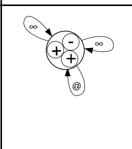
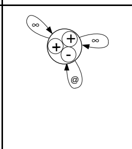
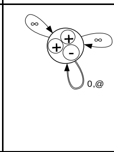
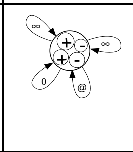
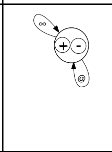
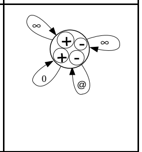


(а) (б) (в)

Рис. 4. Динамические особенности точки твердого тела с координатой h=h_1: (а) амплитудно-частотная характеристика, (б) динамический инвариант в виде графа, отображающий знакопостоянные формы динамических взаимодействий, (в) динамический инвариант в виде графа, отображающий динамическое состояния с одним резонансом

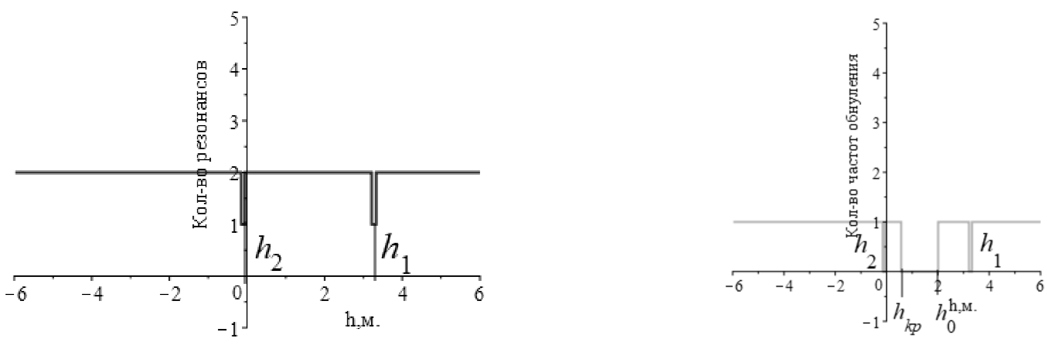
На основе множества координат h точек твердого тела определяется совокупность динамические инвариантов, отображающих разнообразие динамических состояний точек твердого тела для фиксированного коэффициента связности (табл. 1).

Табл. 1. Распределение динамических инвариантов по координате h

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9
I	$h<h_2$	$h=h_2$	$h_2<h<h_{кр}$	$h=h_{кр}$	$h_{кр}<h<h_0$	$h=h_0$	$h_0<h<h_1$	$h=h_1$	$h_1<h$
II									
III									
IV	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_0^2F_1^2$	$S_1^2F_1^2$	$S_1^2F_2^2$	$S_0^1F_1^1$	$S_1^2F_2^2$
V	J_7	J_3	J_7	J_5	J_5	J_6	J_7	J_3	J_7

Представления о динамических особенностях могут быть представлены в унифицированном виде $S_l^kF_n^m$, где k – количество резонансов, l – количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается, m – количество положительных форм взаимодействий, n – количество отрицательных форм динамических взаимодействий, $J_{k+l+m+n}$ – интегральная характеристика. Динамические инварианты строятся на основе известных методов [8,9].

IV. Динамические инварианты в оценке совокупности динамических состояний точек твердого тела. В зависимости от варьируемой координаты точки твердого тела h динамические особенности могут быть представлены с помощью частных динамических характеристик в виде кусочно-постоянных функций, когда каждой координате точки твердого тела сопоставляются количественные характеристики отдельных динамических особенностей, представляющих собой количества резонансов (рис. 5а), количества частот обнуления (рис. 5б) или количества форм динамических взаимодействий.

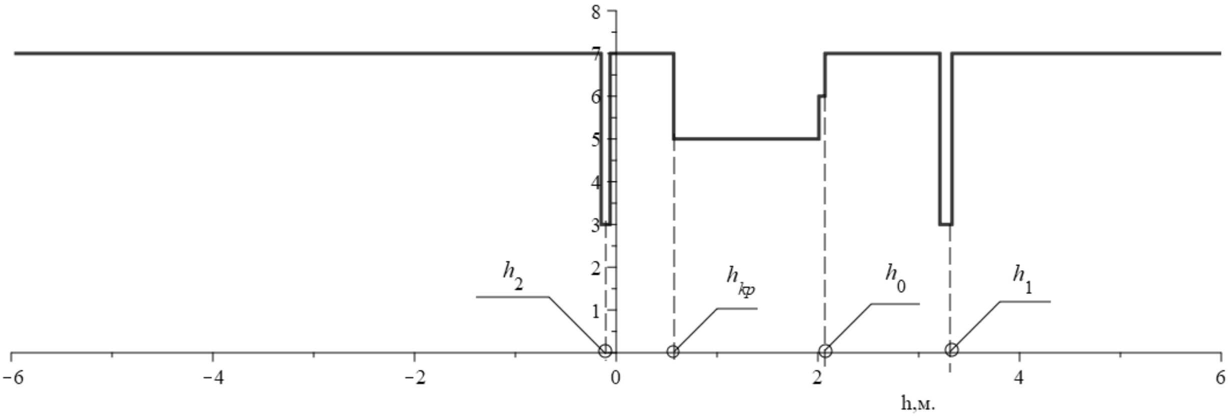


(а) (б)

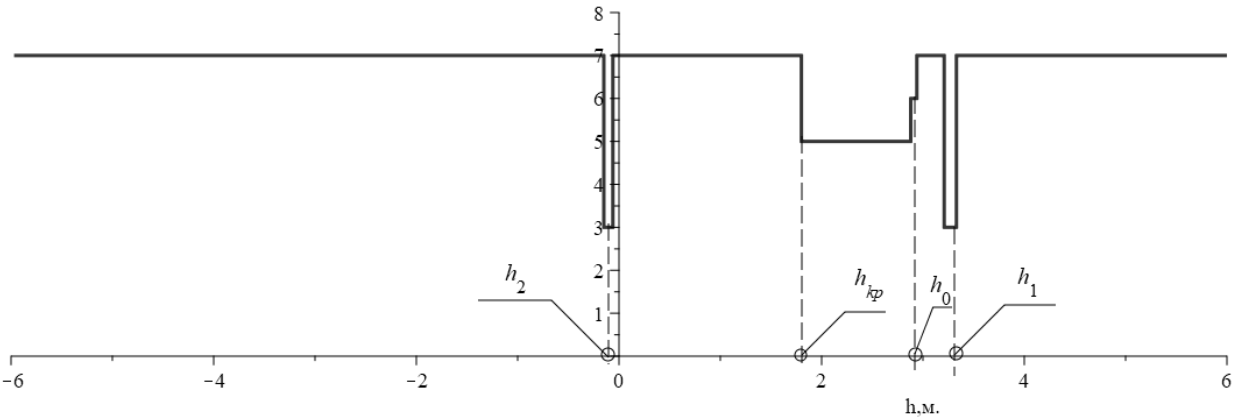
Рис. 5. Частные особенности динамических взаимодействий точек твердого тела в зависимости от координаты: а) число резонансов, б) число режимов обнуления амплитуды колебания объекта

Вместе с тем, для обобщенной оценки динамических особенностей движения объекта механической колебательной системы может быть использована интегральная или полная характеристика, представляющая собой сумму частных характеристик.

IV. Интегральные характеристики динамических особенностей твердого тела с учетом связности силовых возмущений. Для фиксированного коэффициента связности γ может быть построена интегральная характеристика в виде кусочно-постоянной функции, представляющая собой алгебраическую сумму особенностей динамического взаимодействия элементов механической колебательной системы (рис. 6а). Изменение фиксированного значения коэффициента связности γ силовых возмущений Q_1, Q_2 находит своё отражение в частичном перераспределении граничных точек, образующих разбиения множества координат точек поверхности твердого тела (рис.6б).



(а)



(б)

Рис. 6. Интегральные характеристики динамических особенностей твердого тела в зависимости от коэффициента связности: а) γ=0; б) γ=0,3

Для фиксированного коэффициента связности γ распределение динамических особенностей по координатам точек твердого тела обладает структурой, выражающейся в существовании областей с различными динамическим инвариантами.

Заключение. Разработан подход к обобщенной оценке совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов механической колебательной системы, образованной твердым телом, находящемся в условиях связных силовых возмущений, отличающийся тем, что для оценки совокупности динамических состояний используются характеристики динамических инвариантов. Разработанный подход может рассматриваться как метод регуляризации совокупности динамических состояний механической колебательной системы, позволяющий рассматривать бесконечное многообразие динамических состояний в виде конечного набора обобщенных состояний системы. Можно полагать, что разработанный подход может служить элементом научно-методологического базиса для решения широкого круга задач динамики, в частности, для задач управления вибрационным полем рабочих органов вибрационных технологических машин.

Список литературы

1. Piersol, A. and Paez, T. Harris' Shock and Vibration Handbook. – Mcgraw-Hill, 2009. – 168 p
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 1064 p.
3. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). – Иркутск : ИрГУПС, 2018. – 692 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Каимов Е.В. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации. – Депонированная рукопись № 230 – В 2013 02.08.2013
5. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неудерживающих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4(40). – С. 51-60.
6. Елисеев А.В. Технология оценки свойств динамического взаимодействия в контактах составных твердых тел // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. – 2014. – № 1-2. – С. 179-183.
7. Елисеев С.В. Характеристики взаимодействия материальной частицы и поверхности колебания в зависимости от постоянной силы с учетом неудерживающей связи / С.В. Елисеев, И.С. Ситов, А.В. Елисеев // В книге: Техника и технология: новые перспективы развития. 2012. С. 20-23.
8. Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К. Системный подход к оценке динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения: структурные схемы, передаточные функции, динамические инварианты // Системы. Методы. Технологии. – 2022. – № 2 (54). – С. 7-19.
9. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №15. – С. 18-30.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. – Springer International Publishing, Cham, 2020, vol. 252, 521 p.
11. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука. 1959. – 368 с.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры математики;

Миронов Артем Сергеевич – соискатель.