УДК 517.935.2 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2022-10-34-37

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ТРАЕКТОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Раецкий К.А.
Воронежский государственный университет, Воронеж

Ключевые слова: стабилизация, полная управляемость, метод неопределенных коэффициентов, контрольные точки.
Аннотация. Решается задача моделирования стабилизированной траектории линейной полностью управляемой динамической системы. Кроме экспоненциального сближения стабилизированной траектории и программной траектории с течением времени, в данной работе накладывается требование полного их совпадения в контрольные моменты времени. Построение стабилизированной траектории осуществляется методом неопределенных коэффициентов, позволяющем получить стабилизированное управление и стабилизированную траекторию динамической системы в аналитическом виде.

MODELING OF A STABILIZED TRAJECTORY OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM BY THE METHOD OF INDEFINITE COEFFICIENTS.

Raetsky K.A.
Voronezh State University, Voronezh

Keywords: stabilization, complete controllability, method of indeterminate coefficients, control points.
Abstract. The problem of modeling a stabilized trajectory of a linear completely controlled dynamical system is solved. In addition to the requirement of exponential rapprochement of the stabilized trajectory and the program trajectory over time, this paper imposes the requirement of complete coincidence of the stabilized trajectory and the program trajectory at control points in time. The construction of a stabilized trajectory is carried out by the method of indefinite coefficients. This method makes it possible to obtain a stabilized control and a stabilized trajectory of a dynamical system in an analytical form.

Рассматривается динамическая система

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{Ax}(t) + \mathrm{Bu}(t) + \mathrm{f}(t), \qquad (1)$$

где $\mathrm{x}(t) \in R^n$, $\mathrm{u}(t) \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$, A и B – матрицы соответствующих размеров, матрица B – необратимая; $t \in [t_0, t_k]$, $\mathrm{f}(t) \in R^n$ – дополнительная входная непрерывная вектор-функция.

Системами вида (1) моделируются механические движения, описываемые основными законами динамики: динамические процессы в электрических цепях; в экономике (динамическая модель межотраслевого баланса и др.); динамические процессы в биологии (изменение численности популяции зверьков и др.); динамические процессы в медицине (распространение инфекционных заболеваний и др.); динамические процессы в социологии (распространение информации) и многие другие процессы.

Система (1) предполагается полностью управляемой, то есть существует управляющее воздействие $\mathrm{u}(t)$, под действием которого состояние, траектория системы $\mathrm{x}(t)$ переводится из произвольного состояния x_0 в произвольное состояние x_k за произвольно заданный промежуток времени $[t_0, t_k]$. Следовательно, выполняется условие критерия Калмана $\operatorname{rank}(\mathrm{B}\ \ \mathrm{AB}\ \ldots\ \mathrm{A}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}) = \mathrm{n}$.

В работах [1], [2] разработан каскадный метод построения в аналитическом виде вектор-функций $\mathrm{u}(t)$ и $\mathrm{x}(t)$ для системы (1) с дополнительным требованием прохождения траектории системы $\mathrm{x}(t)$ в произвольно заданные моменты времени t_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$; $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$) через любые точки $\mathrm{x}_i \in R^n$.

Доказано, что условие Калмана есть полное условие существования $\mathrm{u}(t)$ и $\mathrm{x}(t)$ для системы (1) с многоточечными условиями

$$\mathrm{x}(t_i) = \mathrm{x}_i, \ i = 0, 1, \ldots, k. \tag{2}$$

В работах [3], [4] разработан метод неопределенных коэффициентов решения задачи (1), (2). В работе [3] построены $\mathrm{u}(t)$ и $\mathrm{x}(t)$ в экспоненциально-полиномиальном виде; в [4] – в экспоненциально-дробно-рациональном виде. Создана программа в PITON для решения методом неопределенных коэффициентов двухточечной задачи для (1) с привлечением тригонометрических функций [5].

Рассчитанные $\mathrm{u}(t)$ и $\mathrm{x}(t)$ называются программной управляющей вектор-функцией (программным управлением) и программным состоянием или программной траекторией, соответственно.

Если в начальный момент времени изменились условия, например, произошло резкое изменение температуры или изменение местоположения динамической установки, или порыв ветра и т.д. и условие $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}_0$ невыполнимо, а начальное значение теперь это x^*, то зачастую бывает выгоднее (гораздо эффективнее) не решать заново задачу (1), (2) с новым начальным значением x^*, а стабилизировать систему (1), то есть построить стабилизирующее управление $\mathrm{v}(t)$ и состояние $\mathrm{y}(t)$ такие, чтобы с течением времени стабилизированные управление $\overline{\mathrm{u}}(t)$ и состояние $\overline{\mathrm{x}}(t)$ сближались с программными управлением и состоянием.

В данной работе от стабилизированной траектории требуется экспоненциальное сближение с $\mathrm{x}(t)$:

$$\left\|\overline{\mathrm{x}}(t) - \mathrm{x}(t)\right\| = \left\|\mathrm{y}(t)\right\| < \mathrm{c} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{w}t}, \ \mathrm{w} > 0, \tag{3}$$

и совпадение программной траектории $\mathrm{x}(t)$ со стабилизированной траекторией $\overline{\mathrm{x}}(t)$ в контрольные моменты времени:

$$\overline{\mathrm{x}}(t_0) = \mathrm{x}^*, \ \overline{\mathrm{x}}(t_\mathrm{i}) = \mathrm{x}(t_\mathrm{i}), \ i = 1, 2, \ldots, \mathrm{k}. \tag{4}$$

Совершается переход к задаче

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t), \tag{5}$$

$$y(t_0) = x^* - x_0 = y_0,\ y(t_i) = 0,\ i = 1, 2, \dots, k, \tag{6}$$

где $v(t) = \bar{u}(t) - u(t)$. Вектор-функции $y(t)$ и $v(t)$ формируются в виде

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot e^{-c_j t},\ v(t) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot e^{-c_j t} \tag{7}$$

с неопределенными векторными коэффициентами. Число r зависит от количества моментов t_i (то есть равно $k+1$) и от числа p: $r = (k+1)(p+1)$, где $p = \min q$, а q находится из условия Калмана: $\operatorname{rank}(B\ AB\ \dots\ A^{q-1}B) = n$.

Условие (3) выполняется за счет подбора соответствующих коэффициентов c_j в (7).

Выражения (7) подставляются непосредственно в (5) и (6). В преобразованном равенстве (5) приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях линейно-независимых функций $e^{-c_j t}$ и вместе с условиями (6) формируется система

$$(A + c_j \cdot I)\alpha_j + B\beta_j = 0,\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot e^{-c_j t_0} = y_0,\ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \cdot e^{-c_j t_i} = 0, \tag{8}$$

$j = 1, 2, \dots, r$, $i = 1, 2, \dots, k$, I – единичная матрица в R^n.

Поскольку система (8) – векторная, то для каждых компонент α_j и β_j формируются линейные алгебраические системы с определителем Δ, первые p строк которого – это строки определителя Вронского для функций $e^{-c_1 t}$, $e^{-c_2 t}$, …, $e^{-c_r t}$ при значении $t = t_1$; следующие p строк – это строки определителя Вронского для этих же функций при значении $t = t_2$; и т. д.; последние p строк – это строки вронскиана при $t = t_k$. Такой определитель отличен от нуля, если $c_j = j \cdot c$, $c > 0$, или если $c_j = c + (j-1)d$, $c > 0$, $d > 0$.

Особенность системы (8) в том, что из нее можно найти коэффициенты α_j не находя β_j. То есть построить множество стабилизированных траекторий $\bar{x}(t) = x(t) + y(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + f(t), \tag{9}$$

и условиям (4), получаемым за счет неединственности решения задачи (8). Из этого множества траекторий можно выбрать наиболее подходящую по каким-либо требованиям (критериям) траекторию, затем из первого уравнения в (8) найти β_j; затем, с этим найденным β_j, построить по формуле в (7) стабилизирующее управление $\mathrm{v}(t)$; затем построить стабилизированное управление $\overline{\mathrm{u}}(t) = \mathrm{u}(t) + \mathrm{v}(t)$.

На практике состояние, траектория $\overline{\mathrm{x}}(t)$ системы (9) при выполнении условия $\overline{\mathrm{x}}(t_0) = \mathrm{x}^*$ при реализуемом управлении $\overline{\mathrm{u}}(t)$ будет обладать свойствами (4) за счет единственности решения начальной задачи для системы (9).

Список литературы

1. Zubova S.P., Raetskaya E.V. On polynomial solutions of the linear stationary control system // Automation and Remote Control. 2008, vol. 69(11), pp. 1852-1858.
2. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Automation and Remote Control. 2017, vol. 78(7), pp. 1189-1202.
3. Zubova S.P., Raetskiy K.A. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Mathematical Biosciences and Engineering. 2021, vol. 18(6), pp. 7861-7876.
4. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями // Таврический вестник информатики и математики. – 2021. – №1(50). – С. 65.-80.
5. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2022667066. Программа для решения задачи управления состоянием стационарной линейной динамической системы / Раецкий К.А. – Заявка № 2022666539 от 07.09.2022; зарег. 14.09.2022.

Сведения об авторе:

Раецкий Кирилл Александрович – аспирант.