УДК 539.3:534.1 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2022-9-56-59

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ПЛАСТИНЫ В ЗАДАЧЕ ПАНЕЛЬНОГО ФЛАТТЕРА В УТОЧНЁННОЙ И ДОПОЛНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Кудрявцев Б.Ю.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина, Москва

Ключевые слова: флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.

Аннотация. В линейной постановке исследована задача об устойчивости в сверхзвуковом потоке газа пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности тонкого клина. Пластина имеет шарнирное опирание по краям, вектор скорости потока направлен по оси клина. Предложен вариант решения задачи оптимизации распределения толщины при некоторых дополнительных ограничениях.

THE OPTIMIZATION OF PLATE THICKNESS DISTRIBUTION IN SUPPLEMENTED AND REFINED STATEMENT OF THE PANEL FLUTTER PROBLEM

Kudryavtsev B.Yu.

Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow

Keywords: flutter, supersonic gas flow, plate of variable thickness, stability.

Abstract. The problem of stability in the supersonic gas flow of the plate of variable thickness, which forms a part of the surface of a thin gusset, was approached in the linear setting. The plate is freely supported along the edges, the velocity vector of the flow is directed along the axis of the gusset. A solution for optimization of the plate thickness' distribution was proposed for the case of some additional constraints.

Библиография статей по теме панельного флаттера довольно обширна [1-5]. В частности, в ряде работ рассмотрена пластина переменной толщины [6-9]. Предлагаемая статья содержит вариант решения задачи оптимизации распределения толщины пластины, составляющей часть поверхности тонкого профиля, для повышения устойчивости.

Пусть имеется пластина, которая находится на поверхности тонкого клина и в плоскости OXY занимает область $G=\{(x,y), x_0 \le x \le x_0+s, 0 \le y \le 1\}$. Кромки пластины шарнирно оперты. Вектор скорости потока направлен по оси клина. Следуя [1-6], запишем линейное уравнение колебаний в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h_1^3(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}))+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(h_1^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(h_1^3(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}))+$$

$$+A_2x(M^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{1}{c_0}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2})+A_1M^2\frac{\partial w}{\partial x}+A_0M\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot h_1=0$$

с соответствующими граничными условиями

$$w\Big|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}=w|_{x=x_0+s}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=x_0+s}=0,$$

$$w|_{y=0}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0}=w|_{y=1}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=1}=0.$$

Здесь

$$A_0=\frac{8k\sqrt{3(1-v^2)}pl^2}{(k+1)c_0{h_0}^2\sqrt{E\rho}}tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),$$

$$A_1=\frac{48k(1-v^2)pl^3}{E{h_0}^3(k+1)}tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),$$

$$A_2=\frac{12k(1-v^2)pl^3}{E{h_0}^3}tg(\beta)(1-\eta\frac{12a^*(tg\beta)}{k(1+k)}),$$

$$a^*=1+2/((k-1)M^2tg^2\beta),\ \eta=\frac{k-1}{k+1},$$

w - прогибы пластины, $h=h_0\cdot h_1(x,y)$ и l - ее толщина и ширина, ρ – плотность материала, E – модуль Юнга, v – коэффициент Пуассона, k – показатель политропы, M – число Маха, v – скорость потока, p и c_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, α – угол полураствора клина, наклон ударной волны β определяется из уравнения

$$tg\beta=tg\alpha+\eta a(tg\beta)tg\beta.$$

Рассмотрим случай, когда $h_1(x,y)=1+\varepsilon(f_1(x)+f_2(y)),\varepsilon<<1$, где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – симметричные относительно соответствующих середин сторон пластины функции, удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^{1/s}f_1(x)dx=0,\ \int_0^1 f_2(y)dy=0. \qquad (1)$$

Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка ${h_1}^3(x,y)=1+3\varepsilon(f_1(x)+f_2(y))$, и уравнение колебаний можно представить следующим образом:

$$(1+3\varepsilon(f_1+f_2)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+6\varepsilon\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+$$

$$+3\varepsilon\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)+6\varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)+3\varepsilon\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)+$$

$$+A_2xM^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_1M^2\frac{\partial w}{\partial x}+A_0M\frac{\partial w}{\partial t}+(1+\varepsilon(f_1+f_2)\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}=0.$$

Решения уравнения колебаний возьмём в виде

$$w=\exp(\omega t)\sin\pi y(c_1\sin\frac{\pi(x-x_0)}{s}+c_2\sin\frac{2\pi(x-x_0)}{s}),c_1,c_2\in R,\omega\in C.$$

Критическую скорость потока $v_{кр}$ будем находить как наименьшую скорость v, при которой комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость. Проведя процедуру Бубнова-Галеркина, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Условие существования нетривиального решения составляет характеристическое уравнение, содержащее ω и M. Переходу от устойчивого состояния к неустойчивому будет соответствовать чисто мнимое значение ω[6]. Для упрощения обозначений возьмем $x_0=0$. Приравняв к нулю действительные и мнимые части уравнения, получим с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно ε выражение для нахождения $M_{кр} = v_{кр} / c_0$:

$$M_{кр}^2 = M_0^2 + \varepsilon M_1 \int_0^{1/s} f_1(x)\sin^2 s\pi x dx + \varepsilon M_2 \int_0^{1/s} f_1(x)\sin^2 2s\pi x dx + \varepsilon M_3 \int_0^1 f_2(y)\sin^2 \pi y dx .$$

Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить такую функцию h_1, при которой $M_{кр}$ принимает наибольшее значение при некоторых дополнительных ограничениях [8]. В качестве ограничений, следуя [10], возьмем условия (1) и

$$\int_0^{1/s} (f_1'(x))^2 dx \le C,\ \int_0^1 (f_2'(y))^2 dy \le C,\ C \in R .$$

Первые условия означают постоянство площади перпендикулярного сечения пластины при фиксированной другой координате, вторые – что решение задачи ищется в классе гладких функций.

Функция Лагранжа рассматриваемой задачи имеет вид:

$$L(f) = f_1(x)\sin^2 \pi sx + \lambda_1 f_1(x)\sin^2 2\pi sx + \lambda_2 (f_1'(x))^2 + \lambda_3 f_1(x) + \lambda_4 f_2(y)\sin^2 \pi y +$$
$$+ \lambda_5 (f_2'(y))^2 + \lambda_6 f_2(y),$$

где λ_i – неопределенные множители. Из условий стационарности получаем систему уравнений

$$\sin^2 \pi sx + \lambda_1 \sin^2 2\pi sx - 2\lambda_2 f_1''(x) + \lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_4 \sin^2 \pi y + \lambda_6 - 2\lambda_5 f_2''(y) = 0,$$

из которой находим

$$f_1(x) = \eta_1 + \eta_2 x + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_3 + 1}{8\lambda_2} x^2 + \frac{\cos 2\pi sx}{16\pi^2 s^2 \lambda_2} + \frac{\lambda_1 \cos 4\pi sx}{64\pi^2 s^2 \lambda_2},$$
$$f_2(y) = \mu_1 + \mu_2 y + \frac{2\lambda_6 + \lambda_4}{8\lambda_5} y^2 + \frac{\lambda_4 \cos 2\pi y}{16\pi^2 \lambda_5} .$$

Обозначим $\eta_3 = \dfrac{\lambda_1 + 2\lambda_3 + 1}{8\lambda_2}, \mu_3 = \dfrac{2\lambda_6 + \lambda_4}{8\lambda_5}$ и примем условия нормировки $16\pi^2 s^2 \lambda_2 = 1,\ \dfrac{16\pi^2 \lambda_5}{\lambda_4} = 1.$

Тогда

$$f_1(x) = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2 + \cos 2\pi s x + \frac{\lambda_1 \cos 4\pi s x}{4},$$

$$f_2(y) = \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 y^2 + \cos 2\pi y .$$

Параметры η_i и μ_i находятся из граничных условий и ограничения (1).

Учитывая симметричность функций f_1 и f_2, положим:

$$f_1'(0) = \psi,\ f_1'(1/s) = -\psi,\ f_2'(0) = \gamma,\ f_2'(1) = -\gamma.$$

Из равенства нулю интегралов получаем:

$$\eta_1 = -\frac{\psi}{6s^2}, \eta_2 = \psi, \eta_3 = -\psi s, \mu_1 = -\frac{\gamma}{6}, \mu_2 = \gamma, \mu_3 = -\gamma.$$

Окончательно будем иметь

$$f_1(x) = -\frac{\psi}{6s^2} + \psi x - \psi s x^2 + \cos 2\pi s x + \frac{\lambda_1}{4}\cos 4\pi s x,$$

$$f_2(y) = -\frac{\gamma}{6} + \gamma y(1 - y) + \cos 2\pi y .$$

При этом для достижения эффекта оптимизации знак ε нужно выбирать в зависимости от коэффициентов M_i. Наличие x_0, не равного нулю, даст, очевидно, аналогичный результат.

Список литературы

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М., Наука, 2006. 247с.
2. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой пластины. Инновационное развитие: потенциал науки и современного образования: монография. Пенза: Наука и просвещение. 2018. С. 170-186.
3. Эшматов Б.Х., Эшматов Х., Ходжаев Д.А. Нелинейный флаттер вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей из композиционного материала с сосредоточенными массами // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. №4(320). С. 74-85.
4. Показеев В.В., Кийко С.И., Кудрявцев Б.Ю. О моделировании процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Известия МГТУ МАМИ. 2013. Т. 3. № 1(15). С. 101-104.
5. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной панели, составляющей часть поверхности тонкого клина // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 2. С. 59-62.
6. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности клина. // Современные тенденции развития науки и образования: Теория и практика. II Международная научно-практическая конференция. Московский политехнический университет; под ред. Г.С. Жуковой. 2018. С. 175-178.
7. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины // Известия МГТУ МАМИ. 2012. Т. 1. № 1(13). С. 249-255.
8. Кудрявцев Б.Ю. Задача оптимизации распределения толщины пластины в исследовании проблемы панельного флаттера // Известия МГТУ МАМИ. 2014. Т. 4. № 1(19). С. 77-82.
9. Кадыров А.К., Кийко И.А. Флаттер упругой полосы переменной толщины // Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф. 2005. Т. 11. Вып. 2. мех. С. 46-52.
10. Брадусь А.С., Картвелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 110-139.

Сведения об авторе:

Кудрявцев Борис Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент.