

РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ МЫШЦЫ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Зимин А.И., Гарвардт А.А., Попов Д.В., Чабунин И.С.
Московское высшее общевойсковое командное училище, г. Москва

Ключевые слова: мощность, мышца, аналитический расчет.

Аннотация. В статье рассматривается получение аналитических соотношений для максимальной механической мощности мышцы, для оптимальных величин силы мышц и скорости сокращения мышц, при которых развивается максимальная мощность мышцы. В основу выводов положено характеристическое уравнение Хилла зависимости силы тяги мышцы от скорости мышечного сокращения.

CALCULATION OF THE MAXIMUM MECHANICAL POWER OF A HUMAN MUSCLE BASED ON A MECHANICAL MODEL

Zimin A.I., Ilminsky A.I., Korneev I.O., Chabunin I.S.
Moscow higher military command school, Moscow

Keywords: power, muscle, analytical calculation.

Abstract. The article considers obtaining analytical ratios for maximum muscle mechanical power, for optimal values of muscle strength and muscle contraction rate, at which the maximum muscle power develops. The conclusions are based on Hill's characteristic equation, the dependence of the traction force of the muscle on the speed of muscle contraction.

Как известно, в механике, которая с греческого переводится как искусство построения машин, изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. В настоящее время предмет механики выходит за рамки построения машин и проникает практически во все сферы человеческой деятельности. Не является исключением и сам человек, поскольку, как любое материальное тело, его движения, взаимодействие с другими материальными телами, физические возможности и пр. определяются и описываются законами механики.

Рассмотрим, например, механику мышечного сокращения. В нем важное место занимает зависимость силы тяги мышцы от скорости мышечного сокращения. Впервые эта зависимость была установлена в работе [1]. Для описания этой зависимости наиболее часто применяется характеристическое уравнение Хилла [2], лауреата Нобелевской премии 1922 года по физиологии. В современных обозначениях [3] эта зависимость – уравнение Хилла – имеет вид:

$$(F + a_1)(v + a_2) = a_2(F_0 + a_1), \quad (1)$$

где F – сила тяги мышцы; F_0 – максимальная сила тяги мышцы; v – скорость сокращения мышцы; a_1, a_2 – константы.

Мощность, развиваемая мышцей, равна по определению величине $N = Fv$. Рассчитаем максимальную мощность, которую способна развить мышца. Ясно, что к данной задаче максимальная сила прямого отношения не имеет; ясно также, что максимальная мощность определяется произведением оптимальных значений

силы и скорости: F^* и v^* , лежащих внутри соответствующих диапазонов изменения силы и скорости.

Найдём максимальное значение мощности мышцы, а также оптимальные величины силы мышц и скорости сокращения мышц, при которых развивается максимальная мощность мышцы, исходя из уравнения Хилла. Для этого раскроем скобки в уравнении (1) и после преобразований получим:

$$Fv + a_1v = a_2F_0 - a_2F. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует (если принять во внимание, что первое слагаемое в левой части уравнения (2) есть механическая мощность мышцы $Fv = P$), что функции $F(v)$ и $P(v)$ соответственно равны:

$$F(v) = \frac{a_2F_0 - va_1}{v + a_2}, \quad (3)$$

$$P(v) = a_2F_0 - a_2F - va_1 = a_2F_0 - va_1 - a_2 \frac{a_2F_0 - va_1}{a_2 + v}. \quad (4)$$

Найдём аналитическое выражение для экстремума этой функции. Экстремум функции $P(v)$ определяется условиями $\frac{dP}{dv} = 0$ и $\frac{d^2P}{dv^2} < 0$. Найдём производную мощности по скорости:

$$\frac{dP}{dv} = a_2^2 \cdot \frac{a_1 + F_0}{(v + a_2)^2} - a_1. \quad (5)$$

Приравняем правую часть соотношения (5) нулю, откуда определим такую величину скорости сокращения мышцы v^* , при которой достигается максимальная мощность:

$$a_2^2 \cdot \frac{a_1 + F_0}{(v^* + a_2)^2} - a_1 = 0, \text{ или } a_2^2 \cdot \frac{a_1 + F_0}{(v^* + a_2)^2} = a_1. \quad (6)$$

Проверка показала, что вторая производная мощности по скорости при v^* отрицательна, следовательно, экстремум функции $P(v)$ – максимум.

Из последнего соотношения получаем для величины v^* :

$$v^* = \frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}} - a_2 = a_2 \sqrt{1 + \frac{F_0}{a_1}} - a_2 = a_2 (\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1). \quad (7)$$

Из соотношения (4) получаем расчетное выражение для максимальной мощности мышцы:

$$P_{\max} = P(v^*) = a_2F_0 - a_1 \left(\frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}} - a_2 \right) - a_2 \frac{a_2F_0 - \left(\frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}} - a_2 \right) a_1}{\frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}}}. \quad (8)$$

$$P_{\max} = a_2 \left(F_0 - \sqrt{a_1^2 + F_0 a_1} + a_1 - \sqrt{a_1} \cdot \frac{F_0 - \sqrt{a_1^2 + F_0 a_1} + a_1}{\sqrt{a_1 + F_0}} \right), \quad (9)$$

$$\text{или } P_{\max} = a_2 \left(F_0 - a_1 \left(\sqrt{1 + \frac{F_0}{a_1}} - 1 \right) - \frac{F_0 - a_1 \left(\sqrt{1 + \frac{F_0}{a_1}} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{F_0}{a_1}}} \right).$$

Данное выражение эквивалентно следующему соотношению, записанному в более компактном виде

$$P_{\max} = a_2 \left(F_0 - a_1 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right) - \frac{F_0 - a_1 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right)}{\sqrt{1 + F_0/a_1}} \right).$$

Последнее соотношение сводится к виду:

$$P_{\max} = a_2 \left[F_0 - a_1 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right) \right] \cdot \left[1 - 1/\sqrt{1 + F_0/a_1} \right]. \quad (10)$$

Рассчитаем величину оптимальной силы, т.е. такой силы, при которой достигается максимальная мощность мышцы:

$$F(v^*) = \frac{a_2 F_0 - v^* a_1}{v^* + a_2} = \frac{a_2 F_0 - \left(\frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}} - a_2 \right) a_1}{\left(\frac{a_2 \sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}} - a_2 \right) + a_2} = \frac{F_0 - \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_1 + F_0} + a_1}{\frac{\sqrt{a_1 + F_0}}{\sqrt{a_1}}}. \quad (11)$$

Последнее выражение можно несколько упростить:

$$F^* = F(v^*) = \frac{F_0 \sqrt{a_1} - a_1 \cdot \sqrt{a_1 + F_0} + a_1 \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 + F_0}}. \quad (12)$$

Возможна и другая форма расчетного соотношения для F^* :

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{F_0 - a_1 \cdot \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right)}{\sqrt{1 + F_0/a_1}} = \frac{a_1 + F_0 - a_1 \cdot \sqrt{1 + F_0/a_1}}{\sqrt{1 + F_0/a_1}} = \\ &= \frac{a_1 + F_0 - a_1 \cdot \sqrt{1 + F_0/a_1}}{\sqrt{1 + F_0/a_1}} = \frac{a_1(1 + F_0/a_1) - a_1 \cdot \sqrt{1 + F_0/a_1}}{\sqrt{1 + F_0/a_1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поделим слагаемые (каждое из них) числителя в последнем соотношении на знаменатель, в результате получим:

$$F^* = a_1 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right). \quad (14)$$

Интересно, что значение оптимальной силы по соотношению (14) не зависит от величины a_2 .

Из выражений (7) и (14) получим компактное выражение для максимальной мощности, развиваемой мышцей:

$$P_{\max} = v^* F^* = a_2 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right) \cdot a_1 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right) = a_1 a_2 \left(\sqrt{1 + F_0/a_1} - 1 \right)^2. \quad (15)$$

Приведём пример расчёта обсуждаемых механических величин – скорости и мощности. Из экспериментального графика зависимости силы, развиваемой мышцей, от скорости укорочения, полученного на большой грудной мышце человека, приведённого в работе [4], и соответствующей таблицы экспериментальных результатов (табл. 1) из той же работы, нами в результате

проведённых расчётов получено, что средние значения соответствующих механических величин равны: $F_0 = 196$ Н, $a_{1,cp} = 147$ Н, $a_{2,cp} = 0,84$ м/с.

Подставив эти значения ($F_0 = 196$ Н, $a_{1,cp} = 147$ Н, $a_{2,cp} = 0,84$ м/с) в расчётное соотношение для максимальной мощности, получим $N_{max} = 34,6$ Вт. Сравнивая эту величину с мощностью, полученной непосредственно из графика, представленного в работе [4], которая составляет близкую к расчётной величину 36,1 Вт, приходим к выводу о корректности и достаточной точности полученной расчётной формулы (15).

Табл. 1. Результаты эксперимента

v , м/с	0	0,1	0,2	0,45	0,5	0,6	0,9	1,0	1,15
F , Н	196	157	136	78	69	56	19	10	0
P , Вт	0	15,7	27,2	35,1	34,5	33,6	17,1	10,0	0
a_1 , Н	–	123	193	150	140	176	133	108	–
a_2 , м/с	–	0,71	1,10	0,86	0,81	1,02	0,83	0,62	–

Рассчитаем теперь, пользуясь теми же экспериментальными данными, значения оптимальной силы и оптимальной скорости F^* и v^* при помощи соотношений (14) и (7). В результате получим $F^* = 77,5$ Н и $v^* = 0,44$ м/с. Эти величины полностью соответствуют максимальному значению мощности на экспериментальном графике, представленном в работе [4].

Итак, аналитически получены расчётные соотношения для максимальной мощности мышцы, для оптимальных величин силы мышц и скорости сокращения мышц, при которых развивается максимальная мощность мышцы.

Список литературы

1. Fenn W., Marsch B. // J. Physiology. 1935. Vol. 85. P. 277-297.
2. Hill A. Proceed. Roy. Soc. B. 1938. Vol. 126. P. 136-195.
3. Зацюрский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 143с.
4. Ralston H., Polissar M., Inman V., Close J., Feinsteen B. Appl. Physiology. 1949. Vol. 1. P. 526-533.

Сведения об авторах:

Зимин Алексей Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин, МВОКУ, г. Москва;

Гарвардт Александр Андреевич – курсант, МВОКУ, г. Москва;

Попов Денис Владимирович – курсант, МВОКУ, г. Москва;

Чабунин Игорь Сергеевич – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин, МВОКУ, г. Москва.