УДК 519.3:05.011.56:621.865.8 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2021-7-13-17

МИНИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

Бохонский А.И., Рыжков А.И.
Севастопольский государственный университет, г.Севастополь

Ключевые слова: переносное движение, цель движения, конструирование управления, управление с минимальной энергоёмкостью.

Аннотация. Результаты конструирования оптимальных управление типа «разгон-торможение» привели к универсальной аналитической функции управления (переносного ускорения) поступательным и вращательным движением объектов, из которой следуют известные частные случаи. Аналитически и численно подтверждено существование предельной минимальной энергии управления данного типа, при которой осуществимо перемещение объекта из исходного состояния покоя в новое состояние покоя при фиксированных расстоянии и времени движения.

CONTROL ENERGY MINIMIZATION FOR THE TARGET OF MOTION REALIZATION

Bokhonsky A.I., Ryzhkov A.I.
Sevastopol State University, Sevastopol

Keywords: portable motion, target of motion, control design, control with minimum energy consumption.

Abstract. The results of optimal controls designing for «acceleration-deceleration» type have led to a universal analytical control function (portable acceleration) of the translational and rotational motion of objects, from which the well-known special cases follow. Analytically and numerically, the existence of a limiting minimum control energy of this type is confirmed, at which it is possible to move an object from initial state of rest to a new state of rest at a fixed distance and time of motion.

Пример перемещением объекта (с закрепленными концами и фиксированным временем, когда оптимальное управление доставляет экстремум функционалу $\int_0^T U^2 dt$) послужил основой для конструирования новых управлений типа разгон-торможение. Использован алгоритм: формулирование цели движения и ограничений; задание движения в виде полинома; определение констант, факторизация полинома; восстановление уравнения Эйлера и функционала-критерия, принимающего минимальное значение.

С использованием алгоритма реверсионного принципа оптимальности (РПО) получен широкий класс кососимметричных управлений типа «разгон-торможение» [1-9].

Для ускорения переносного движения приемлема универсальная зависимость

$$U_e(t) = \frac{a(2n+4)(T-2t)^n}{T^n}, \tag{1}$$

где $a = \dfrac{L}{T^2}$, из которой следуют известные случаи; n – целое нечетное число. Согласно (1) находятся скорость и перемещение:

$$V_e = \int U_e\,dt + C_1,\;\; S_e = \int V_e\,dt + C_2. \qquad (2)$$

При $t = 0$ $V_e(0) = 0$ и $S_e(0) = 0,$ после определения констант C_1 и C_2, получено:

$$V_e = \frac{L}{T(n+1)}\left(1-(T-2t)^{n+1}\cdot T^{-n-1}\right),$$
$$S_e = \frac{L}{2T(n+1)}\left(T^{-n-1}(T-2t)^{n+2} + 2tn + 4t - T\right). \qquad (3)$$

Теорема *о минимальной энергии движения*. Для заданного расстояния и времени оптимального движения объекта из исходного покоя в конечный покой (разгон с торможением) цель движения достижима с предельной минимальной затратой энергии.

Доказательство. Для исходных данных m=1*кг*, $L = 1$ *м*, $T = 1$ *с* предельно возможная энергия управления вычисляется как

$$A = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\int_0^{T/2} U_e(t)\cdot V_e(t)\,dt = \frac{4(n+2)}{n+1}\int_0^{T/2}\left[(1-2t)^n - (1-2t)^{2n+1}\right]dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+2)^2\right]'}{\left[(n+1)^2\right]'} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)'}{(n+1)'} = 1. \qquad (4)$$

В процессе решения для раскрытия неопределенности типа ∞/∞ использовано правило Лопиталя. Если, например, при $n = 7$ энергия $A = 1{,}2656$*Дж*, то при n=1121 энергия $A = 1{,}0017$*Дж*. График зависимости энергии от степени полинома $A(n)$ изображен на Рисунке 1.

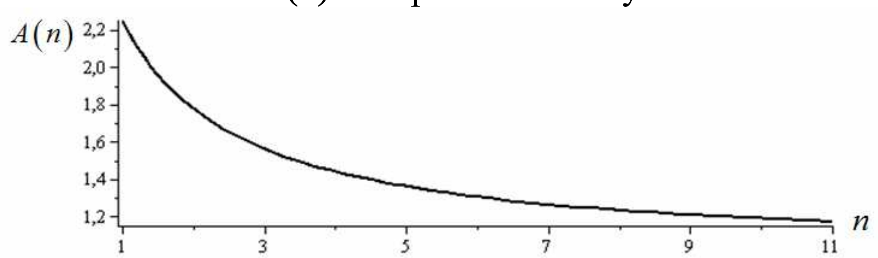

Рис. 1. Зависимость энергии $A(n)$ от степени полинома

Энергетическая гипербола для приведенного случая имеет асимптоту $A = 1$*Дж* Для практики, конечно, достаточно использовать $n = 3$ или, например, $n = 5$, что должно упростить техническую реализацию управления. Из универсальных зависимостей для перемещения, скорости и ускорения (1),(3) следуют известные частные случаи, полученные ранее путем конструирования управлений [4-9].

При $n = 1$ из (1) следует известный результат:

$$S_e = \frac{Lt^2}{T^3}\left(3T-2t\right),\ V_e = \frac{6LT\left(T-t\right)}{T^3},\ U_e = \frac{6L\left(T-2t\right)}{T^3}. \qquad (5)$$

Управлению (5) соответствуют интегральные характеристики:

– действие (по Лагранжу) $J_1 = \int_0^T V_e^2 dt = \frac{1,2L^3}{T}$;

– норма мощности $\int_0^T U^2 dt = \frac{12L^3}{T^3}$; (6)

– энергия $A = 2\int_0^{T/2} U_e \cdot V_e dt = \frac{2,25L^2}{T^2}$.

Графики $U_e(t)$, $V_e(t)$, $S_e(t)$ для случая $n=1$ изображены на рисунке 2.

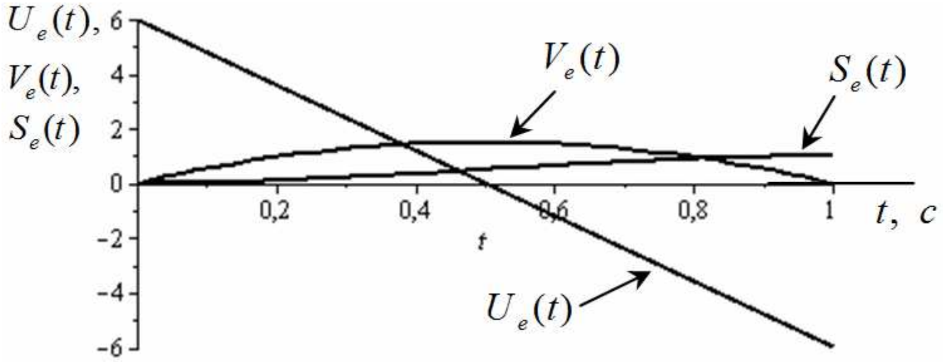

Рис. 2. Ускорение, скорость и перемещение (при $n=1$)

При $n=3$ результат совпадает с полученным при использовании РПО [2-4]:

$$S_e = \frac{Lt^2}{T^5}\left(5T^3 - 10T^2t + 10Tt^2 - 4t^3\right),$$
$$V_e = \frac{10Lt}{T^5}\left(T-t\right)\left(2t^2 - 2Tt + T^3\right), \qquad (7)$$
$$U_e = \frac{10L}{T^5}\left(T-2t\right)^3.$$

Управление (7) можно получить как классическим вариационным методом при новом функционале-критерии, так и конструированием.

Пример. Результат ранее опубликован в [3-9]. Согласно алгоритму РПО (восстановление функционала по заданной аналитической функции) перемещение принято в виде полинома:

$$S_e\left(t\right) = \sum_{i=1}^{4} C_i t^{i+1} = C_1t^2 + C_2t^3 + C_3t^4 + C_4t^5, \qquad (8)$$

где $C_1..C_4$ находятся с учетом краевых условий и косой симметрии управления. Полиному (8) автоматически удовлетворяют условия $S_e\left(0\right)=0$, $V_e\left(0\right)=0$. Для определения констант $C_1..C_4$ использованы условия:

$$S_e\left(T\right)=L,\ V_e\left(T\right)=0;\ U_e\left(T/2\right)=0;\ \frac{dU_e}{dt}\left(T/2\right)=0. \qquad (9)$$

Из (9), как системы алгебраических уравнений, найдены корни:

$$C_1 = \frac{5L}{T^2};\; C_2 = -\frac{10L}{T^3};\; C_3 = \frac{10L}{T^4};\; C_4 = -\frac{4L}{T^5}. \qquad (10)$$

С учетом факторизации полинома (8) получены выражения $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$. Полином является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^4U_e}{dt^4} = 0 \text{ или } \frac{d^6S_e}{dt^6} = 0. \qquad (11)$$

Уравнению Эйлера (11) соответствует функционал-критерий

$$J = \int_0^T \left[\ddot{U}_e\right]^2 dt. \qquad (12)$$

Если использовать вариационный метод, то необходимо заранее знать функционал-критерий (12) и из записанного для него уравнение Эйлера найти решение (с учетом краевых условий), которое совпадет с (7).

Время движения в случае перемещения упругого объекта из исходного состояния в конечное состояние абсолютного покоя находилось в [3-9] как один из общих корней системы трансцендентных уравнений, в которые превращаются моментные соотношения в относительном движении; для упругой системы с одной степенью свободы: $x_r(T) = 0,\; \dot{x}_r(T) = 0.$

Для управления (7) интегральные характеристики принимают вид

$$J_1 = \frac{1{,}11L^2}{T};\; J_2 = \frac{14{,}2857L^2}{T^3};\; A = \frac{1{,}5625L^2}{T^2}. \qquad (13)$$

Графики $U_e(t).\, V_e(t)$, $S_e(t)$, для случая $n = 3$ изображены на рисунке 3.

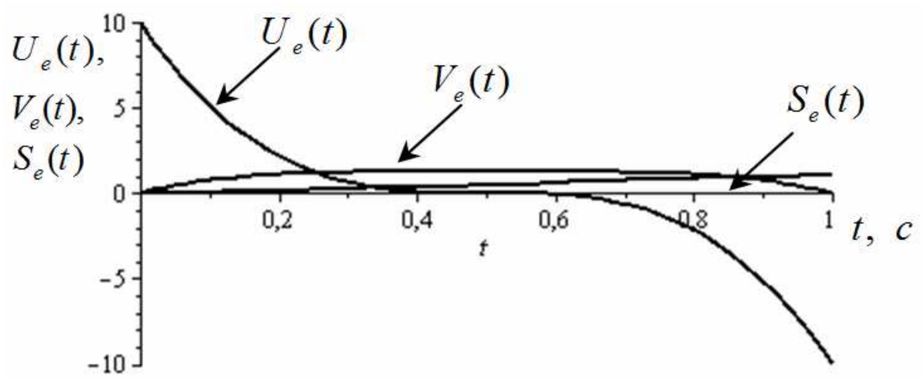

Рис. 3. Ускорение, скорость и перемещение (при $n = 3$)

Сопоставляя (6) и (13), следует подчеркнуть, что действие и энергия уменьшились, но норма мощности возрастает. Если в случае $n = 1$ при решении задачи вариационным методом был принят известный критерий $\int_0^T U^2 dt$, то в случае $n = 3$ критерием является $\int_0^T \left[\ddot{U}_e\right]^2 dt.$

Заключение. При реверсионном конструировании выполняются условия достаточности экстремума функционала-критерия (согласно Якоби, Вейерштрасса и Лежандра [3]), а также подтверждается его минимум в результате построения графического образа.

Конструирование кососимметричных управлений (ускорений) расширило возможности использования классической задачи Лагранжа с закреплёнными концами траектории и фиксированным временем.

Установлена универсальная аналитическая зависимость для управления, из которой, как частные случаи, следуют известные. Доказана теорема о существовании минимальной энергии управления, при которой достижима цель движения. Для современной техники с объектами конечной жесткости (мехатронные модули, манипуляторы, крупногабаритные нежесткие конструкции в земных условиях и в состоянии невесомости) применимы управления рассмотренного типа.

Список литературы

1. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. – Севастополь: СевНТУ, 2007. –246с.
2. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171p.
3. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: Монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212с.
4. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности: монография / А.И. Бохонский. – М.: Вузовский учебник, ИНФРА, 2016. – 174с.
5. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – Санкт-Петербург: НИЦ МС, 2020. – 120с.
6. Бохонский А.И. Механика управляемого движения объектов: учебное пособие / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, Т.В. Мозолевская. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 170с.
7. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.
8. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171p.
9. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: Монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212с.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Техническая механика и машиноведение», СевГУ, г.Севастополь;

Рыжков Александр Игоревич – ассистент кафедры «Техническая механика и машиноведение», СевГУ, г.Севастополь.