УДК 539.3 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2020-6-50-53

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВСТАВКИ И ТРУБЫ С ВНУТРЕННИМ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Казаков К.Е.
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г.Москва

Ключевые слова: механика контактного взаимодействия, неоднородное покрытие, смешанное интегральное уравнение, быстро изменяющиеся функции.
Аннотация. Статья посвящена нахождению аналитического решения задачи взаимодействия вязкоупругой стареющей трубы с внутренним неоднородным покрытием и цилиндрической вставки, помещенной с натягом внутрь трубы. Для такой задачи выписана математическая модель, представляющая из себя смешанное интегральное уравнение. Аналитическое решение уравнения получено в виде ряда и выделенной отдельным сомножителем функции, описывающей неоднородность покрытия. Это позволяет производить эффективные вычисления, когда покрытие сильно неоднородно.

INTERACTION BETWEEN A CYLINDRICAL INSERT AND A PIPE WITH A HIGHLY NONUNIFORM INNER COATING

Kazakov K.E.
Ishlinsky Institute for problems in mechanics RAS, Moscow

Keywords: contact mechanics, nonuniform coating, mixed integral equations, rapidly changing functions.
Abstract. The article is devoted to finding an analytical solution to the problem of interaction of a viscoelastic aging pipe with an internal nonuniform coating and a cylindrical insert placed with an interference fit inside the pipe. For such a problem, a mathematical model has been written out. It is a mixed integral equation. The analytical solution of the equation is obtained in the form of a series. A function which describes the nonuniformity of the coating distinguished by a separate factor. This allows efficient calculations when the coverage is highly heterogeneous.

Рассмотрим длинную трубу, состоящую из двух слоев. Внешний слой такой трубы изготовлен в момент времени τ_{out} из вязкоупругого стареющего материала. Его внешний радиус равен r_{out}, а толщина – h_{out}. Внутренний слой выполнен из упругого материала. Его внешний радиус равен $r_{\text{in}} = r_{\text{out}} - h_{\text{out}}$, а его толщина – h_{in}. Предполагается, что упругие свойства внутреннего слоя зависят от продольной координаты z и внутренний упругий слой мягче, чем внешний вязкоупругий слой. Между описанными слоями осуществляется глакий контакт. В такую трубу в момент времени $\tau_0 \geq \tau_{\text{out}}$ помещается жесткая цилиндрическая вставка. Предполагается, что на границе внутреннего слоя и вставки осуществляется гладкий контакт. Внешний радиус g вставки больше внутреннего радиуса ($r_{\text{in}} - h_{\text{in}}$) трубы в недеформированном состоянии на величину δ (т.е. $\delta = g - (r_{\text{in}} - h_{\text{in}}) \geq 0$ – натяг). Из-за этого труба деформируется и в ней возникают напряжения. Предполагается, что 1) вставка расположена на достаточном расстоянии от концов трубы; 2) толщина покрытия (внутреннего слоя) на порядок меньше длины вставки $2a$ или внутреннего радиуса трубы ($r_{\text{in}} - h_{\text{in}}$), т.е. $h_{\text{in}} \ll \{2a,\ r_{\text{in}} - h_{\text{in}}\}$. Задача состоит в том, чтобы найти распределение контактных напряжений в трубе вокруг вставки (в области $[-a,a]$ на внутренней границе двухслойной трубы).

Для постановки краевой задачи заменим действие жесткой вставки на действие распределенной нагрузки $q(z,t)$ на области $[-a,a]$. Используя подход, описанный в [1] для задачи трубы с однородным покрытием, можно получить следующее соотношение для радиального смещения внутренней поверхности трубы в случае, когда покрытие неоднородно

$$u_{\mathrm{r}}(r_{\mathrm{in}}-h_{\mathrm{in}},z,t)=\frac{1-\nu_{\mathrm{in}}^2(z)}{E_{\mathrm{in}}(z)}h_{\mathrm{in}}q(z,t)+\frac{2(1-\nu_{\mathrm{out}}^2)}{\pi}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{out}}(t-\tau_{\mathrm{out}})}\int_{-a}^{a}k_{\mathrm{c}}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\mathrm{in}}}\right)q(\zeta,t)d\zeta-\right.$$
$$\left.-\int_{\tau_0}^{t}\frac{K(t,\tau)}{E_{\mathrm{out}}(\tau-\tau_{\mathrm{out}})}\int_{-a}^{a}k_{\mathrm{c}}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\mathrm{in}}}\right)q(\zeta,\tau)d\zeta d\tau\right],$$

где $\nu_{\mathrm{in}}(z)$, $E_{\mathrm{in}}(z)$ – коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия (внутреннего слоя), ν_{out}, $E_{\mathrm{out}}(t)$ – коэффициент Пуассона и модуль Юнга внешнего слоя; $K(t,\tau)$ – ядро ползучести (см., например, [2])

$$K(t,\tau)=E_{\mathrm{out}}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{out}}(\tau)}+C_{\mathrm{out}}(t,\tau)\right],$$

$C_{\mathrm{out}}(t,\tau)$ – мера ползучести; $k_{\mathrm{c}}(s)$ – известное ядро цилиндрической контактной задачи (с внутренним нагружением), имеющее вид

$$k_{\mathrm{c}}(s)=\int_0^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos(su)du, \tag{1}$$

$$L(u)=\frac{u[f(k_r,u)D_1^2(u)+k_r^{-1}-k_ru^2C_1^2(u)]}{S(u)},\quad f(r,u)=\frac{2(1-\nu_{\mathrm{in}})}{r}+u^2r,\quad k_r=\frac{r_{\mathrm{out}}}{r_{\mathrm{in}}},$$

$$S(u)=\frac{f(1,u)}{k_r}+f(k_r,u)+k_ru^4A_1^2(u)-u^2f(k_r,u)B_1^2(u)-k_ru^2f(1,u)C_1^2(u)$$
$$+f(1,u)f(k_r,u)D_1^2(u), \tag{2}$$

$$A_1(u)=\mathrm{I}_0(u)\mathrm{K}_0(k_ru)-\mathrm{I}_0(k_ru)\mathrm{K}_0(u),\quad B_1(u)=\mathrm{I}_0(u)\mathrm{K}_1(k_ru)+\mathrm{I}_1(k_ru)\mathrm{K}_0(u),$$
$$C_1(u)=\mathrm{I}_0(k_ru)\mathrm{K}_1(u)+\mathrm{I}_1(u)\mathrm{K}_0(k_ru),\quad D_1(u)=\mathrm{I}_1(u)\mathrm{K}_1(k_ru)-\mathrm{I}_1(k_ru)\mathrm{K}_1(u).$$

Здесь $\mathrm{I}_0(u)$, $\mathrm{I}_1(u)$, $\mathrm{K}_0(u)$, $\mathrm{K}_1(u)$ – функции Бесселя.

С другой стороны, смещение внутренней поверхности трубы задано и равно натяжению δ. As a result, we get a mixed integral equation

$$\frac{1-\nu_{\mathrm{in}}^2(z)}{E_{\mathrm{in}}(z)}h_{\mathrm{in}}q(z,t)+\frac{2(1-\nu_{\mathrm{out}}^2)}{\pi}\left[\frac{1}{E_{\mathrm{out}}(t-\tau_{\mathrm{out}})}\int_{-a}^{a}k_{\mathrm{c}}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\mathrm{in}}}\right)q(\zeta,t)d\zeta-\right.$$
$$\left.-\int_{\tau_0}^{t}\frac{K(t,\tau)}{E_{\mathrm{out}}(\tau-\tau_{\mathrm{out}})}\int_{-a}^{a}k_{\mathrm{c}}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\mathrm{in}}}\right)q(\zeta,\tau)d\zeta d\tau\right]=\delta, \tag{3}$$

из которого необходимо найти контактные давления $q(z,t)$ на отрезке $[-a,a]$.

Переходя в (3) к безразмерным переменным и функциям по формулам

$$z^*=\frac{z}{a},\quad \zeta^*=\frac{\zeta}{a},\quad \tau_{\mathrm{out}}^*=\frac{\tau_{\mathrm{out}}}{\tau_0},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \delta^*=\frac{\delta}{a},\quad c^*(t^*)=\frac{E_{\mathrm{out}}(t-\tau_{\mathrm{out}})}{E_0},$$

$$m^*(z^*)=\frac{E_0}{2(1-\nu_{\rm out}^2)a}\frac{1-\nu_{\rm in}^2(z)}{E_{\rm in}(z)}h_{\rm in},\quad q^*(z^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_{\rm out}^2)q(z,t)}{E_{\rm out}(t-\tau_{\rm out})},$$
$$\mathbf{V}^* f(t^*)=\int_1^{t^*}K(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,\quad \mathbf{F}^* f(z^*)=\int_{-1}^{1}k^*(z^*,\zeta^*)f(\zeta^*)d\zeta^*, \tag{4}$$
$$k^*(z^*,\zeta^*)=\frac{1}{\pi}k_{\rm c}\left(\frac{z-\zeta}{r_{\rm in}}\right),\quad K^*(t^*,\tau^*)=K(t-\tau_{\rm out},\tau-\tau_{\rm out})\tau_0,$$

получим смешанное интегральное уравнение в безразмерном виде

$$c^*(t^*)m^*(z^*)q^*(z^*,t^*)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}^*)\mathbf{F}^*q^*(z^*,t^*)=\delta^*. \tag{5}$$

Здесь E_0 – некоторая размерная постоянная, а $\mathbf{I}$ – тождественный оператор. Легко показать, что ядро $k_{\rm c}(s)$ и функция $L(u)$ из формул (1), (2), имеют те же свойства и асимптотику, что и функции $k_{\rm pl}(s)$ и $L(u)$ для плоской задачи из [3, 4] или функции $k_{\rm cyl}(s)$ и $L(u)$ для цилиндрической задачи из [5].

Основное интегральное уравнение (5) практически полностью совпадает с уравнением (5), решение которого построено в статье [6] в части IV для плоской контактной задачи: отличие состоит в том, что в нашем уравнении (5) нет первого интегрального оператора по времени, а в правой части отсутствует слагаемое $\alpha(t)x$. Оно также полностью совпадает с уравнением с уравнением (2) из статьи [5] для трубы с внешним покрытием. Тогда метод решения аналогичен, а окончательные формулы в безразмерных переменных имеют вид:

$$q^*(z^*,t^*)=\frac{1}{m^*(z^*)}\sum_{k=0}^{\infty}f_k^*(t^*)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}p_m(z^*),\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1, \tag{6}$$

$$f_k^*(t^*)=\sqrt{J_0}\psi_{k0}\delta^*(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{1}{c^*(t^*)+\gamma_k},\quad J_k=\int_{-1}^{1}\frac{(\zeta^*)^k d\zeta^*}{m^*(\zeta^*)},$$

$$p_k(z^*)=\frac{1}{\sqrt{d_{k-1}d_k}}\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k\\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & z^* & \cdots & (z^*)^k\end{vmatrix},\quad d_{-1}=1,\quad d_k=\begin{vmatrix} J_0 & \cdots & J_k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ J_k & \cdots & J_{2k}\end{vmatrix},$$

$$\mathbf{W}_k f(t^*)=\int_1^t R_k(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где переменные γ_k и ψ_{km} определяются из решения задачи

$$\sum_{l=0}^{\infty}K_{ml}\psi_{kl}=\gamma_k\psi_{km},\quad K_{ml}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{k^*(z^*,\zeta^*)p_m(z^*)p_l(\zeta^*)}{m^*(z^*)m^*(\zeta^*)}dz^*d\zeta^*,\quad k,m=0,1,2,\ldots,$$

а ядро $R_k(t^*,\tau^*)$ — это резольвента ядра $K_k(t^*,\tau^*)=\gamma_k K^*(t^*,\tau^*)/[c^*(t^*)+\gamma_k]$.

Можно записать выражение для контактных напряжений в размерной форме, используя обратную замену переменной (4) в выражении (6)

$$q(z,t)=\frac{E_{\rm in}(z)}{1-\nu_{\rm in}^2(z)}\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}p_m\left(\frac{z}{a}\right),\quad z\in[-a,a],\quad t\ge\tau_0,$$

$$f_k(t)=\frac{a}{h_{\rm in}}\frac{E_{\rm out}(t-\tau_{\rm out})}{E_0}\,f_k^*\left(\frac{t}{\tau_0}\right).$$

В полученном представлении следует обратить внимание на то, что функции, описывающие свойства покрытия, выделяются отдельным сомножителем. Этот факт позволяет проводить качественные расчеты в случаях, когда свойства покрытия описываются быстро изменяющимися функциями. Таких результатов не удается добиться другими известными методами.

Исследование выполнено в рамках государственного задания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

Список литературы

1. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 6. С. 101-109.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. Казаков К.Е., Манжиров А.В. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 3. С. 227-240.
4. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Contact problems for bodies with complex coatings // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. Iss. 13. P. 7692-7705.
5. Kazakov K.E. On the interaction of rigid bush and pipe with nonuniform coating // AIP Conference Proceedings. 2020.
6. Manzhirov A.V., Kazakov K.E. Contact problem for a foundation with a rough coating // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 2224. P. 877-882.

Сведения об авторе:
Казаков Кирилл Евгеньевич – к.ф-м.н., доцент, с.н.с., ИПМех РАН, г.Москва.