УДК 531.15 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2020-6-43-46

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ВЕКТОРЫ УГЛА ПОВОРОТА, УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

Волкова С.Н., Сивак Е.Е., Таныгин О.Ф.
Курская государственная сельскохозяйственная академия имени И.И. Иванова, г.Курск

Ключевые слова: вращающееся тело, радианы, линейная скорость, ускорение точки.

Аннотация. Если угловая скорость возрастает, вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором ***ω***, если уменьшается, вектор углового ускорения направлен противоположно ему. Понятно, что для всех точек вращающегося тела все эти три вектора одинаковы, поэтому можно говорить о векторах угла поворота (или углового пути), угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Свяжем линейную скорость произвольной точки тела с его угловой скоростью.

THE CINEMATIC MOTION OF ROTATIONAL MOTION. TURN ANGLE VECTORS, ANGULAR SPEED AND ACCELERATION

Volkova S.N., Sivak E.E., Tanygin O.F.
Kursk State Agricultural Academy named after I.I. Ivanov, Kursk

Keywords: rotating body, radian, linear speed, point acceleration.

Abstract. If the angular velocity increases, the vector of angular acceleration coincides in the direction of the vector *ω*, if reduced, the vector of angular acceleration is directed opposite to it. It is clear that for all points of the rotating body all these three vectors are the same, so we can talk about the vectors of the angle of the turn (or angular path), angular speed and angular acceleration of the rotating body.

Приведем некоторые сведения из векторной алгебры, которые потребуются в дальнейшем. Векторным произведением двух векторов ***a*** и ***b*** называется вектор ***c***, получаемый с помощью определителя 3-го порядка в том случае, когда известны проекции векторов на оси координат:

$$\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где вектора ***i***, ***j***, ***k*** – единичные вектора выходящие из начала координат и лежащие соответственно на осях x, y, z. Иначе векторное произведение определяется следующим образом (рис. 1): вектор ***c*** перпендикулярен плоскости, образованной векторами ***a*** и ***b*,** модуль вектора ***c*** равен произведению модулей векторов ***a*** и ***b*** на синус угла между ними: $c = ab\sin\alpha$; направление вектора ***c*** определяется правилом правого винта: вращая винт от первого вектора ко второму (в нашем случае от ***a*** к ***b***), определяем направление поступательного движения винта, и это направление совпадает с направлением вектора ***c*.**

Рассмотрим вращающееся вокруг неподвижной оси произвольное твердое тело (рис. 2.2). Углом поворота тела называется вектор ***φ***, модуль которого численно равен углу поворота вектора $\boldsymbol{\rho}$ любой точки вращающегося тела (в нашем случае точки A), выраженному в радианах, а направление определяется правилом правого винта. В соответствии с этим правилом данный вектор лежит на оси вращения и направлен вверх (см. рис. 2).

Вектором угловой скорости вращающегося тела называют производную вектора угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\varphi}', \tag{1}$$

размерность $[\omega]$=рад/с. Если тело вращается вокруг неподвижной оси, вектора $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\omega}$ лежат на оси вращения.

Вектором углового ускорения вращающегося тела называют производную вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\beta} = \vec{\omega}', \qquad (1\ \text{а})$$

размерность $[\beta]$= рад/с^2.

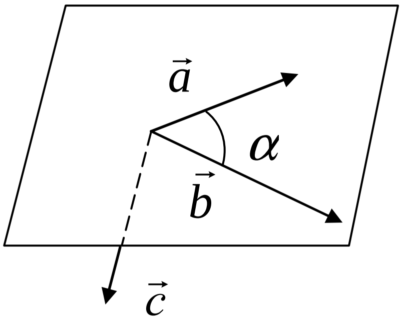
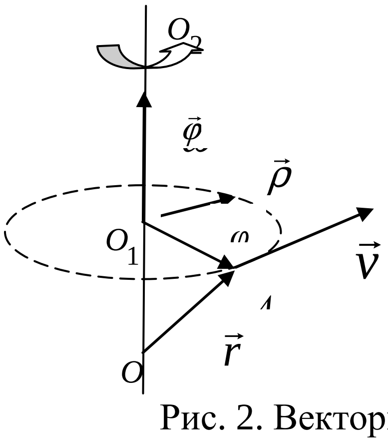


Рис. 1. Вектор c, являющийся результатом векторного произведения вектора a на вектор b, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

Докажем справедливость следующей формулы для линейной скорости точки A (рис.2):

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,]. \tag{2}$$

Определим вначале выражение для модуля $\boldsymbol{v}$. По определению скорости - формула (1.1): $\vec{v} = \vec{r}\,' = (\overline{O}\vec{O}_1 + \vec{\rho})' = \vec{\rho}\,'$ (см. рис.2). Таким образом в нашем случае скорость равна производной вектора $\boldsymbol{\rho}$. Поэтому модуль скорости $|\vec{v}| = |\vec{\rho}\,'| =$ $= \left| \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta t} \right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{|\Delta\vec{\rho}|}{\Delta t}$.



$\overline{O}\vec{O}_1$ - вектор, лежащий на оси вращения O_2O_2,
$\vec{r}$ - радиус- вектор точки A, O_1 -центр окружности, по которой движется произвольная точка A данного тела,
$\boldsymbol{\varphi}$- вектор угла поворота (углового пути), вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен так же, как и вектор $\boldsymbol{\varphi}$,
$\boldsymbol{v}$- вектор линейной скорости точки A, $\boldsymbol{\rho}$ - вектор, соединяющий центр окружности с точкой A,
φ – модуль вектора $\boldsymbol{\varphi}$

Рис. 2. Векторные величины, характеризующие вращение тела

Определим модуль вектора ***Δρ***: Из рисунка (3) видно, что $\left|\Delta\rho\right| = 2\rho\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ как основание равнобедренного треугольника. Поэтому модуль вектора скорости будет равен:

$$\left|\vec{v}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho\Delta\varphi}{\Delta t} = \rho\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \rho\omega.$$

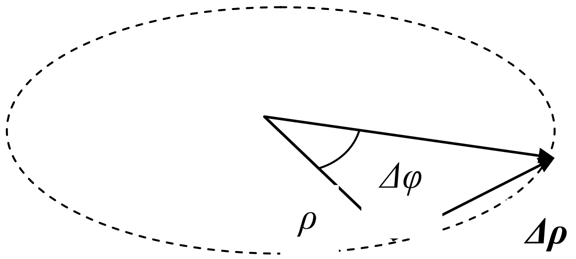


Рис. 3. Определение модуля вектора ***Δρ***

Мы воспользовались тем фактом, что при $\Delta t \to 0$, $\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ и $\dfrac{\Delta\varphi}{2}$ являются эквивалентными бесконечно малыми величинами и одну можно заменить другой. Кроме того, мы использовали свойства предела - постоянную можно вынести за знак предела. И, наконец, мы воспользовались тем, что в случае вращения вокруг неподвижной оси модуль угловой скорости равен производной модуля угла поворота: $\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi'$. Таким образом, модуль скорости равен:

$$v=\rho\omega. \qquad (3)$$

Докажем, что модуль скорости, определяемой по формуле (3), также равен $v=\rho\omega$. Для этого: $\vec{v} = [\vec{\omega}\cdot\vec{r}] = \left[\vec{\omega}\left(\overline{O}\vec{O}_1 + \vec{\rho}\right)\right] = \left[\vec{\omega}\cdot\overline{O}\vec{O}_1\right] + [\vec{\omega}\vec{\rho}] = [\vec{\omega}\vec{\rho}]$- первая квадратная скобка как векторное произведение параллельных векторов равна нулю. Модуль последнего выражения равен $\omega\rho\sin\alpha = \omega\rho$, т.к $\alpha = \boldsymbol{90}°$.

Установим направление вектора скорости, определяемой по формуле (2). Так как ранее мы получили, что $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{\rho}]$, а из рисунка (2.2) видно, что вектор ***v*** перпендикулярен плоскости, образованной векторами ***ω*** и ***ρ*** и направление действительно определяется правилом правого винта. Формула (2)доказана полностью.

Применим формулу (2), чтобы получить выражение для ускорения точки *A*:

$$\vec{a} = \vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\omega}\cdot\vec{r}]' = [\vec{\omega}'\vec{r}] + [\vec{\omega}\cdot\vec{r}'] = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}\cdot\vec{v}] = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]].$$

Так как производная произведения равна известному соотношению, производная угловой скорости равна угловому ускорению, производная радиус-вектора точки равна скорости, а векторное произведение трех векторов может быть выражено через скалярные произведения этих векторов по формуле “бац минус цаб”: $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\ \ \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\right)$, поэтому $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{\rho}) - \vec{\rho}(\vec{\omega}\vec{\omega}) = -\omega^2\vec{\rho}$.

Таким образом, ускорение точки, как и следовало ожидать, равно сумме двух векторов - тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \left[\vec{\beta}\vec{r}\right] - \omega^2\vec{\rho}. \quad (4)$$

Список литературы

1. К вопросу оценки качества прогнозов моделирования экосистем / С.Н. Волкова, Т.И. Романова, М.И. Пашкова, Е.Е. Сивак, Н.А. Костенко // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2017. – № 3. – С. 38-44.
2. Концепция управления эффективностью антропогенного воздействия предприятий АПК / С.Н. Волкова, Е.Е. Сивак, А.А. Сивак, С.Н. Потемкин, В.А. Левченко // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2012. – №6. – С. 12-14.
3. Анализ динамики регионального развития экосистем / С.Н. Волкова, Е.Е. Сивак, М.И. Пашкова и др. // Региональный вестник. – 2016. – № 1. – С. 33-36.
4. Волкова С.Н. Инновационно-инвестиционный процесс прогнозирования эффективного управления АПК // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2015. – №8. – С. 108-111.
5. Время действия прорывных биотехнологий, как современный стандарт жизни / Волкова С.Н., Сивак Е.Е., Кобченко С.Н., Пикалова М.Б., Овчинникова Е.В. // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2019. № 1. С. 147-153.
6. Стратегия развития кадров АПК / Волкова С.Н., Сивак Е.Е., Таныгин О.Ф., Пашкова М.И., Суглобов Н.П., Романова Т.И., Герасимова В.В., Морозова В.В., Кобченко С.Н., Шлеенко А.В., Белова Т.В. – Курск: Изд-во Деловая полиграфия, 2018. – 163 с.
7. Волкова С.Н., Пашкова М.И., Сивак Е.Е., Кобченко С.Н. Информационно-энергетические матрицы // Научное обеспечение агропромышленного производства. Материалы Международной научно-практической конференции. 2018. С. 379-386.

Сведения об авторах:

Волкова Светлана Николаевна – д.с.х.н., профессор, заведующая кафедрой физико-математических дисциплин и информатики, Курская ГСХА, г. Курск;

Сивак Елена Евгеньевна – д.с.х.н., доцент, профессор кафедры стандартизации и оборудования перерабатывающих производств, Курская ГСХА, г. Курск;

Таныгин Олег Федорович – к.т.н., доцент кафедры физико-математических дисциплин и информатики, Курская ГСХА, г. Курск.