

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. СКОРОСТЬ И ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТОЧКИ

Волкова С.Н., Сивак Е.Е., Морозова В.В.

*Курская государственная сельскохозяйственная академия имени И.И. Иванова,
г.Курск*

Ключевые слова: материальная точка, траектория, производная, ускорение, вектор.

Аннотация. Твердое тело – недеформируемое тело – такое, что при любом движении и взаимодействии расстояние между любыми двумя точками этого тела остается неизменным. Поступательное движение твердого тела – такое движение, при котором отрезок, соединяющий любые две точки тела, переносится параллельно самому себе. При поступательном движении траектории движения всех точек тела одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть движение какой-либо точки тела, например центра масс. Если такой точке приписывается вся масса тела, тогда ее называют материальной точкой.

THE CINEMATICS OF PROGRESSIVE MOVEMENT. SPEED AND MOVE POINT

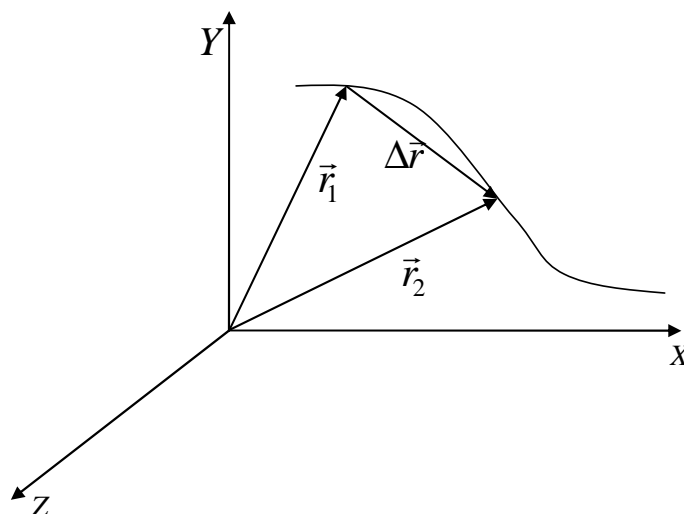
Volkova S.N., Sivak E.E., Morozova V.V.

Kursk State Agricultural Academy named after I.I. Ivanov, Kursk

Keywords: material point, trajectory, derivative, acceleration, vector.

Abstract. The solid body, the non-deformable body, is such that in any movement and interaction the distance between any two points of this body remains the same. The progressive movement of the solid is a movement in which the segment connecting any two points of the body is transferred parallel to itself. When moving forward, the trajectory of all points of the body is the same, so it is enough to consider the movement of any point of the body, such as the center of the masses. If such a point is attributed to the entire body weight, then it is called a material point.

Рассмотрим движение материальной точки по произвольной траектории (рис. 1).



\vec{r}_1 – радиус-вектор материальной точки в момент времени t ,

\vec{r}_2 – радиус-вектор материальной точки в момент времени $t + \Delta t$

Рис. 1. Движение материальной точки по произвольной траектории

Введем понятие скорости материальной точки как производной радиус-вектора материальной точки. Тогда:

$$\vec{v} = \vec{r}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Из определения скорости следует, что в любой точке траектории вектор скорости направлен по касательной к траектории [1].

$$\text{Средняя скорость: } \vec{v}_{cp} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}. \quad (2)$$

Введем понятие ускорения материальной точки как производной вектора скорости:

$$\vec{a} = \vec{v}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3)$$

Для того чтобы взять производную, необходимо записать вектор скорости следующим образом: $\vec{v} = v \cdot \vec{e}$, где v – модуль вектора скорости[2]; \vec{e} – единичный вектор, совпадающий в каждой точке траектории с вектором скорости (рис. 2).

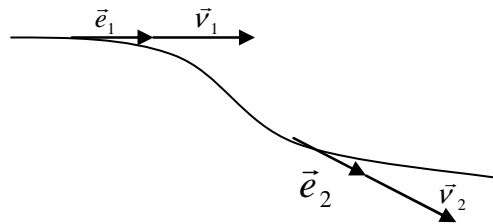


Рис. 2. Единичные векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2

Тогда производная определяется по правилу производной произведения:

$$\vec{a} = \vec{v}' = v' \cdot \vec{e} + v \cdot \vec{e}', \quad (3 \text{ а})$$

где v' – производная модуля скорости; \vec{e} – единичный вектор; \vec{e}' – производная единичного вектора [3].

$$\text{По определению производной: } \vec{e}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta e}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e}_2 - \vec{e}_1}{\Delta t}.$$

Модуль вектора $\vec{\Delta e}$ (рис. 3) равен основанию равнобедренного треугольника с боковыми сторонами, равными единице. При малых углах $\Delta\varphi$ между векторами \vec{e}_2 и \vec{e}_1 синус угла примерно равен самому углу, выраженному в радианах. Поэтому модуль производной единичного вектора можно выразить следующим образом:

$$|\vec{e}'| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{e}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega.$$

Последний предел по определению равен модулю угловой скорости поворота ω единичного вектора \vec{e} [4].

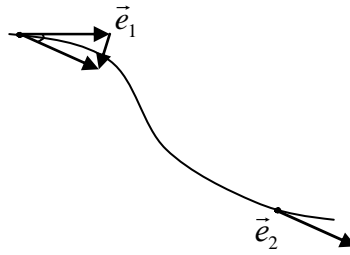


Рис. 3. Определение разности векторов $\vec{\Delta e} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$

Определим направление производной единичного вектора \vec{e} . Как видно из рисунка 3 направление вектора $\vec{\Delta e}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к перпендикуляру к траектории в этой точке, поэтому производная единичного вектора \vec{e} может быть записана следующим образом:

$$\vec{e}' = \omega \cdot \vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор, в любой точке траектории перпендикулярный вектору \vec{e} [5].

В результате получим формулу для ускорения материальной точки:

$$\vec{a} = v' \cdot \vec{e} + v \cdot \omega \cdot \vec{n}. \quad (3 б)$$

Из нее следует, что вектор ускорения в любой точке траектории является суммой двух взаимно перпендикулярных векторов (рис 4), тангенциального \vec{a}_τ и нормального \vec{a}_n ускорений [6].

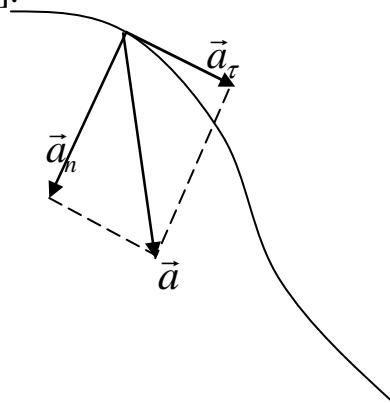


Рис. 4. Нормальное \vec{a}_n , тангенциальное \vec{a}_τ и полное \vec{a} ускорения в произвольной точке траектории [7]

Из рис. 4 и формулы (3б) понятно, что модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(v')^2 + (v \cdot \omega)^2}. \quad (4)$$

Список литературы

1. К вопросу оценки качества прогнозов моделирования экосистем / С.Н. Волкова, Т.И. Романова, М.И. Пашкова, Е.Е. Сивак, Н.А. Костенко // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2017. – № 3. – С. 38-44.
2. Концепция управления эффективностью антропогенного воздействия предприятий АПК / С.Н. Волкова, Е.Е. Сивак, А.А. Сивак, С.Н. Потемкин, В.А. Левченко // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2012. – №6. – С. 12-14.
3. Анализ динамики регионального развития экосистем / С.Н. Волкова, Е.Е. Сивак, М.И. Пашкова и др. // Региональный вестник. – 2016. – № 1. – С. 33-36.

4. Волкова С.Н. Инновационно-инвестиционный процесс прогнозирования эффективного управления АПК // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. – 2015. – № 8. – С. 108-111.
5. Время действия прорывных биотехнологий, как современный стандарт жизни / С.Н. Волкова, Е.Е. Сивак, С.Н. Кобченко, М.Б. Пикалова, Е.В. Овчинникова // Вестник Курской государственной сельскохозяйственной академии. 2019. № 1. С. 147-153.
6. Стратегия развития кадров АПК / Волкова С.Н., Сивак Е.Е., Таныгин О.Ф., Пашкова М.И., Суглобов Н.П., Романова Т.И., Герасимова В.В., Морозова В.В., Кобченко С.Н., Шлеенко А.В., Белова Т.В. – Курск: Изд-во «Деловая полиграфия», 2018. – 163 с.
7. Волкова С.Н., Пашкова М.И., Сивак Е.Е., Кобченко С.Н. Информационно-энергетические матрицы // Научное обеспечение агропромышленного производства. Материалы Международной научно-практической конференции. 2018. С. 379-386.

Сведения об авторах:

Волкова Светлана Николаевна – д.с.х.н., профессор, заведующая кафедрой физико-математических дисциплин и информатики, Курская ГСХА, г. Курск;

Сивак Елена Евгеньевна – д.с.х.н., доцент, профессор кафедры стандартизации и оборудования перерабатывающих производств, Курская ГСХА, г. Курск;

Морозова Виктория Викторовна – к.п.н., доцент кафедры физико-математических дисциплин и информатики, Курская ГСХА, г. Курск.