УДК 531.535 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2019-4-80-84

ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ОТ АМПЛИТУДЫ

Булат Д.Д., Геттингер М.В.
Томский государственный архитектурно-строительный университет, г.Томск

Ключевые слова: колебания, период, маятник, амплитуда.
Аннотация. В статье мы рассматриваем зависимость периода колебаний от амплитуды, а также такое свойство, как изохронность колебаний, на которое обратил внимание еще Галилео Галилей, наблюдая за люстрой в соборе, а в 1957 году по чертежу Гюйгенса были сконструированы часы, ход которых регулировался маятником.

DEPENDENCE OF THE OSCILLATION PERIOD ON THE AMPLITUDE

Bulat D.D., Gettinger M.V.
Tomsk state university of architecture and civil engineering, Tomsk

Keywords: oscillations, period, pendulum, amplitude.
Abstract. In the article we consider the dependence of the oscillation period on the amplitude, also we consider a property as the isochronism of oscillations, which drew attention to Galileo Galilei, observing the chandelier in the Cathedral, and in 1957, according to the drawing of Huygens, a clock was designed, the course of which was regulated by a pendulum.

Физическим маятником, называется твёрдое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Простейшим маятником является груз малых размеров, закрепленный на длинной легкой нити (или стержне). Если можно пренебречь массой нити по сравнению с массой груза, деформацией нити, а также размерами груза по сравнению с длиной нити, то такой маятник называют математическим. При малых углах α отклонения маятника от положения равновесия, как известно, его колебания являются гармоническими, т.е. описываются формулой:

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

где φ_0 – начальная фаза колебаний, ω_0 – циклическая частота колебаний, α_m – амплитуда колебаний, $\varphi = \omega_0 e + \varphi_0$ – фаза колебаний в зависимости от момента времени *t*.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (2)$$

где T – период колебаний, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота, l – длина нити, g – ускорение свободного падения.

Период малых колебаний математического маятника не зависит от амплитуды α_m. Такое свойство колебаний – независимость периода от амплитуды – называют изохронностью колебаний.

Рассмотрим зависимость периода колебаний физического маятника от амплитуды. В частности, насколько малой должна быть амплитуда колебаний физического маятника α_m, чтобы период его колебаний можно считать независимыми от амплитуды, т.е. изохронными.

Для рассмотрения данного вопроса необходимо исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от амплитуды при произвольных, не обязательно малых, ее значениях. Можно провести эксперимент и закрепить результат теоретическим расчетом зависимости периода колебаний от их амплитуды.

Экспериментальная часть

Зависимость $T(\alpha_m)$ лучше всего измерить в большем диапазоне изменения угловых амплитуд. За один период колебаний амплитуда не должна сильно уменьшиться, т.е. затухание колебаний в эксперименте должно быть достаточно малым.

Для такой цели можно использовать в качестве физического маятника велосипедное колесо, крутящееся на хорошем подшипнике, который обеспечит малое затухание колебаний, а также амплитуду можно менять в широких пределах.

Велосипедное колесо будет совершать колебания, если его центр тяжести будет смещен относительно оси вращения. Для этого можно прикрепить груз весом около одного килограмма к ободу. Для удобства эксперимента было бы хорошо увеличить период колебаний, для этого установим еще один груз, только уже меньшей массы, чем первый, на другую сторону колеса, противоположно положению первого груза.

Время замерялось при помощи секундомера. Результаты измерений представим в виде графика, где по вертикальной оси будем откладывать период T, с., а по горизонтальной - значения угловой амплитуды α_m, градусы.

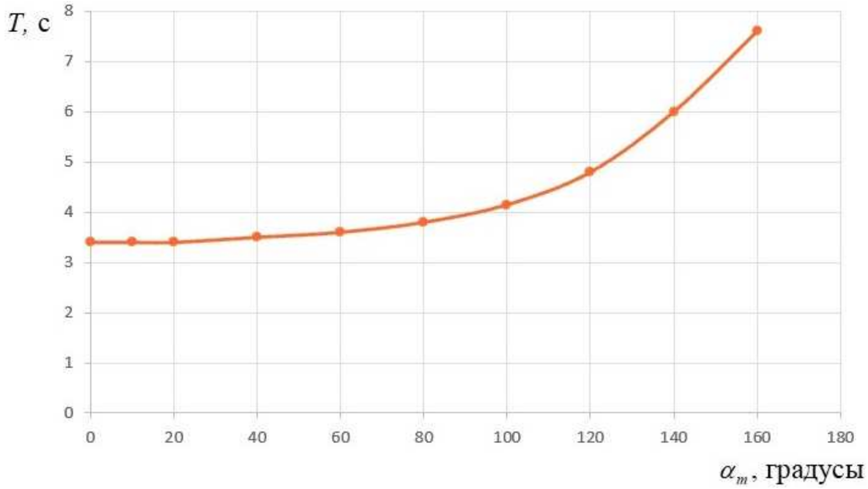

Рис. 1. Зависимость периода колебаний от амплитуды (эксперимент) [3]

По результатам эксперимента можно заметить, что период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. При малых амплитудах эта зависимость выражена слабо. Резкое увеличение периода колебаний наблюдается при приближении угловой амплитуды к 160 градусам. Так, при α_m=160° период колебаний увеличился почти в 2 раза по сравнению с периодом малых колебаний.

Теоретическая часть

Положение твёрдого тела (маятника), которое может качаться вокруг горизонтальной оси O, в каждый момент времени будем характеризовать углом отклонения α от положения равновесия (рис. 2). Маятник вращается вокруг оси, проходящей через точку O, с переменной угловой скоростью $\omega = \dot{\alpha} = d\alpha/dt$.

Линейные скорости различных точек маятника различны и определяются расстоянием r от оси вращения: $\upsilon = \omega r$. Поэтому кинетическая энергия маятника, вращающегося в данный момент с угловой скоростью ω, равна:

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2 ,$$

где Δm_i – масса очень малого фрагмента твёрдого тела, удаленного от оси вращения на расстояние r_i и имеющего скорость $\upsilon_i = \omega r_i$. Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ зависит от распределения массы в твёрдом теле и положения оси вращения. Эту величину называют моментом инерции твёрдого тела относительно данной оси.

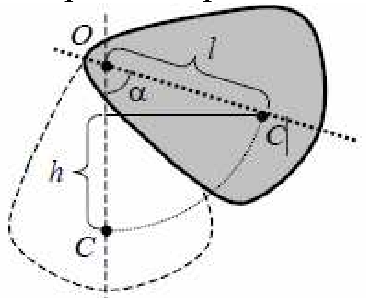

Рис. 2. Физический маятник

Для потенциальной энергии маятника можно записать $E_p = mgh$, где h – высота поднятия центра масс С над самым нижним его положением. Из рис. 2 видно, что $h = l(1 - \cos\alpha)$, где l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Если силами трения и сопротивления можно пренебречь, то полная механическая энергия маятника остается постоянной и, следовательно, ее производная по времени равна нулю.

$$E = \frac{1}{2} I(\dot{\alpha})^2 + mgl(1 - \cos\alpha). \qquad (3)$$

Дифференцируя (3), найдем $dE/dt = I\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\dot{\alpha}\sin\alpha = 0$. Отсюда получим дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin\alpha = 0 \qquad (4)$$

относительно неизвестной функции времени $\alpha = \alpha(t)$. В уравнении (4) введено обозначение $\omega_0^2 = mgl/I$.

Если при малых углах отклонения считать $\sin\alpha \approx \alpha$, то уравнение (4) принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \qquad (5)$$

Решением этого уравнения является функция $\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, в чем легко убедиться, вычислив вторую производную

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \alpha .$$

и подставив ее в уравнение (5) – оно обратится в тождество. Таким образом, при достаточно малых амплитудах колебаний, когда $\sin\alpha \approx \alpha$, колебания маятника являются гармоническими, а период таких малых колебаний (обозначим его T_0) не зависит от амплитуды и определяется формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \qquad (6)$$

В частности, для математического маятника $I = ml^2$ и $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, а для шарнирно закрепленной за один конец однородной палочки массы m и длины L: $I = mL^2/3$, $l = L/2$, $T_0 = 2\pi\sqrt{2L/3g}$.

Для произвольных углов отклонения α выразить решение уравнения (4) в элементарных функциях не удается. Однако уравнение можно решить численно. Существуют различные алгоритмы решения. Самый простой алгоритм может быть осуществлен следующим образом. Зададим некоторые значения угла $\alpha = \alpha_0$ и угловой скорости $\dot{\alpha}_0$ в начальный момент времени $t = t_0 = 0$.

При помощи уравнения (4), вычислим угловое ускорение $\beta_0 = \ddot{\alpha}_0 = -\omega_0^2 \sin\alpha_0$ в этот начальный момент и рассчитаем угол α_1 и угловую скорость $\dot{\alpha}_1$ в момент времени $t_1 = \Delta t$:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0\Delta t + \frac{\beta_0\Delta t^2}{2},\ \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_0 + \beta_0\Delta t.$$

Далее вычислим угловое ускорение $\beta_1 = -\omega_0^2 \sin\alpha_1$ в момент $t_1 = \Delta t$, а затем угол и угловую скорость в следующий момент времени $t_2 = 2\Delta t$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \dot{\alpha}_1\Delta t + \frac{\beta_1\Delta t^2}{2},\ \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1 + \beta_1\Delta t$$

и так далее.

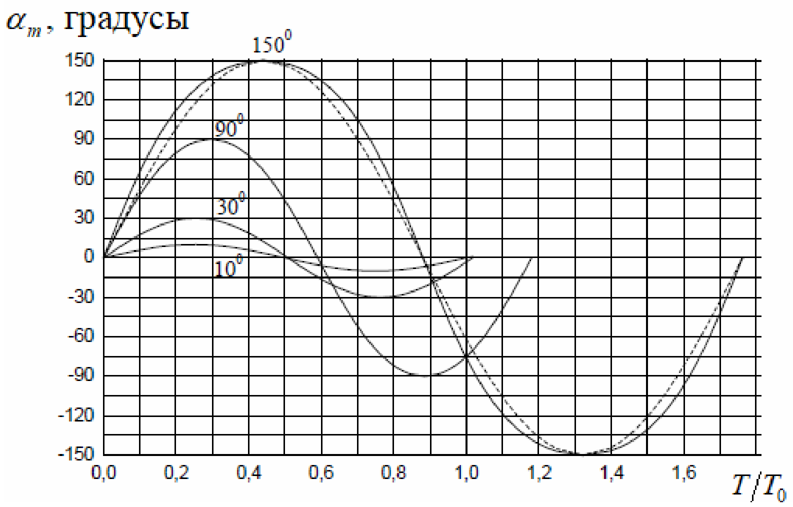

Рис. 3. Зависимость угла отклонения физического маятника от времени при различных угловых амплитудах колебани [3]

На рис. 3 приведены результаты численного решения уравнения (4) для нескольких значений амплитуды α_m. Заметим, что форма колебаний остается близкой к синусоидальной даже при весьма больших амплитудах. Так при $\alpha_m = 150°$ отклонения от синусоидальной формы весьма незначительны (штриховая кривая на рис. 3 рассчитана по формуле $\alpha_m = 150° \sin(2\pi t/T)$, а при $\alpha_m = 90°$ отклонений от синусоидальной зависимости при выбранном на рис. 3

масштабе вообще не заметно. Период колебаний, как видно, увеличивается с ростом угловой амплитуды.

Расчетная зависимость периода колебаний от амплитуды изображена на рис.4 сплошной линией. По оси ординат отложены значения не самого периода колебаний T, а отношения T/T_0, где T_0 – период колебаний при предельно малых амплитудах. Приведенные на рисунках 3, 4 расчетные кривые будут выглядеть совершенно одинаково для всех физических маятников, а различаться будут лишь значения периодов малых колебаний T_0.

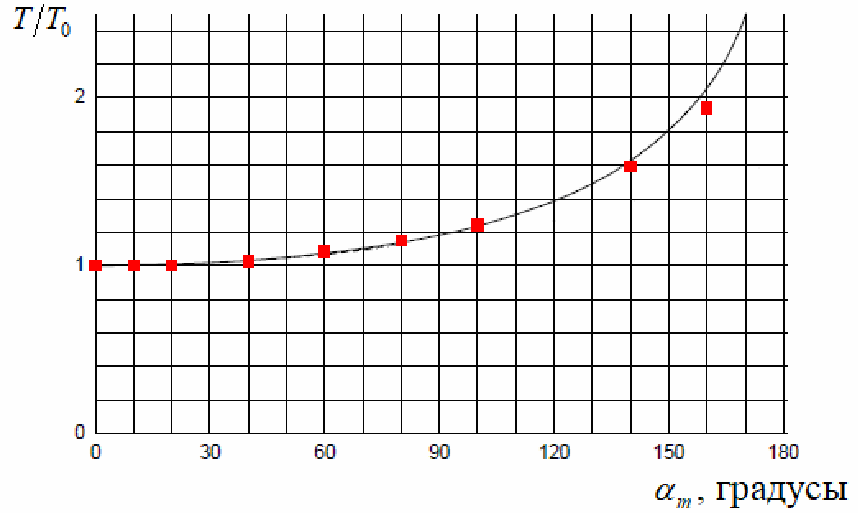

Рис. 4. Точки построены по результатам эксперимента, сплошная построена по результатам теории [3]

На графике (рис. 4) нанесены также точки, полученные по результатам эксперимента с колесом-маятником. Видно, что согласие эксперимента и теории удовлетворительное – расхождения находятся в пределах погрешностей эксперимента.

Численное решение уравнения (4) показывает, что колебания маятника, строго говоря, не являются изохронными – период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. Однако при малых угловых амплитудах зависимость периода от амплитуды выражена слабо.

Анализ полученных результатов углубляет понимание разнообразного мира колебаний. Колебания составляют основу ряду областей физики, поэтому полученные результаты можно использовать для изучения колебаний в других областях физики.

Список литературы

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики учебник для вузов. – М.: Высш. школа., 2007. – 415 с.
3. Горбатый И.Н. Зависимость периода колебаний маятника от амплитуды // Квант. 2005. №2. С. 27-29.

Сведения об авторах:
Булат Дияр Даниярулы – студент ТГАСУ, г.Томск;
Геттингер Максим Викторович – к.ф-м.н., доцент, ТГАСУ, г.Томск.