УДК 531 https://doi.org/10.26160/2542-0127-2019-4-21-27

ПРЕПОДАВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

Погребная Л.И., Галуза Л.Н.
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), г.Санкт-Петербург

Ключевые слова: методы аналитической механики, уравнения Лагранжа второго рода, теоремы динамики, циклические интегралы, голономные механические системы, кинетическая энергия системы, лагранжиан, интеграл Якоби, дифференциальное уравнение относительного движения.
Аннотация. В настоящем докладе на ряде примеров, связанных с изучением динамики вращательного движения, показано, как можно сэкономить время, применяя уравнения Лагранжа вместо других, традиционных для этих задач, методов. При этом законы сохранения будут представлять собой циклические интегралы уравнений Лагранжа. При изучении курса отдаётся предпочтение более общим и совершенным методам решения задач.

TEACHING DYNAMICS OF ROTATING OBJECTS

Pogrebnaya L.I., Galuza L.N.
St. Petersburg state technological institute (technical university), St. Petersburg

Keywords: methods of analytical mechanics, Lagrange's equations of 2nd kind, theorems of dynamics, cyclic integrals, holonomic mechanical systems, kinetic energy of system, lagrangian, Jacobi integral, differential equation of relative motion.
Abstract. This paper gives examples and explains how to save time implementing Lagrange's equations instead of traditional methods commonly used in studying issues of dynamics of rotational motion. In this case, laws of conservation will be described by cyclic integrals of Lagrange's equations. When teaching the course, preference is given to more general and accomplished methods of solving problems.

Традиционное построение курса теоретической механики (раздел «Динамика») сводится к тому, что методы аналитической механики и, в частности, уравнения Лагранжа второго рода, изучаются лишь после того, как основательно прорабатываются на многочисленных примерах с применением теорем динамики и следующих из них законов сохранения движения центра масс, импульса, кинетического момента и полной механической энергии системы. Это, безусловно, весьма полезно, если отводится достаточное количество времени на изучение курса, как это имело место ранее.

Однако, в связи с резким сокращением количества часов на изучение фундаментальных наук и, в частности, теоретической механики весьма актуальной становится проблема достижения прежних результатов в более сжатые сроки. Ясно, что эту проблему нельзя решить только за счет переноса части курса на самостоятельное изучение студентами. Необходимо совершенствовать методику преподавания так, чтобы при изучении курса отдавать предпочтение более общим и совершенным методам решения задач. К таким методам, безусловно, относится применение уравнений Лагранжа второго рода для математического описания движения голономных механических систем.

В данной статье на ряде примеров, связанных с изучением динамики вращательного движения, показано, как можно сэкономить время, применяя уравнения Лагранжа вместо других, традиционных для этих задач, методов. При этом законы сохранения будут представлять собой циклические интегралы уравнений Лагранжа.

Пример 1.

Дано $m_1, m_2, m_3, M, M_c, R_1, R_2, r_2, i_{x1}, i_{x2}$.

Найти уравнение вращательного движения звена 2 механизма на рис. 1.

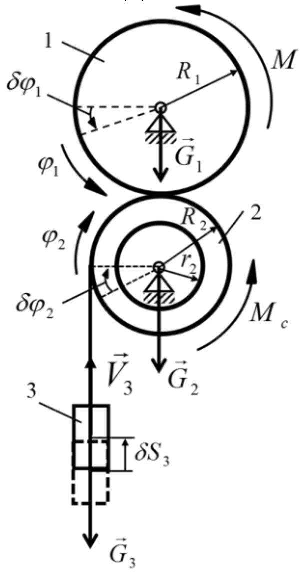

Рис. 1. Схема механизма 1

Система имеет одну степень свободы: $S = 1$. За обобщенную координату примем угол поворота тела 2: $q = \varphi_2$. Направление ее отсчета выбирается в соответствии с предполагаемым направлением вращения звена (2) с учетом действия на ведущее звено (1) вращательного момента М.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{I_{x_1}\omega_1}{2} + \frac{I_{x_2}\omega_2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2} =$$

$$\frac{m_1 i_{x_1}^2 \dot{\varphi}_2^2 R_2^2}{2R_1^2} + \frac{m_2 i_{x_2}^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{\varphi}_2^2 r_2^2}{2} = \tag{1}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2^2}{2}\left(\frac{m_1 i_{x_1}^2 R_2^2}{R_1^2} + m_2 i_{x_2}^2 + m_3 r_2^2\right) = \frac{1}{2} I_{пр_{x_2}}$$

где $\dfrac{m_1 i_{x_1}^2 R_2^2}{R_1^2} + m_2 i_{x_2}^2 + m_3 r_2^2 = I_{пр_{x_2}} = const$.

Сообщаем возможное перемещение $\delta\varphi_2$ и вычислим δA:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - M_c\delta\varphi_2 - m_3 g\delta S_3 =$$

$$M\delta\varphi_2 \frac{R_2}{R_1} - M_c\delta\varphi_2 - m_3 g\delta\varphi_2 r_2 = \tag{2}$$

$$\left(M\frac{R_2}{R_1} - M_c - m_3 g r_2\right)\delta\varphi_2 = Q_{\varphi_2}\delta\varphi_2$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = Q_{\varphi_2}. \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = 0; \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2} = I_{np_{z2}}\dot{\varphi}_2; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = I_{np_{z2}}\ddot{\varphi}_2. \tag{4}$$

Тогда $I_{np_{z2}}\ddot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}$ или, подробно

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{M\frac{R_2}{R_1} - M_c - m_3 g r_2}{\frac{m_1 i_{z2}^2 R_2^2}{R_1^2} + m_2 i_{z2}^2 + m_3 r_2^2}. \tag{5}$$

Далее уравнение интегрируется, как обычно, с учетом заданных начальных условий.

Данный метод решения избавляет от необходимости разбивать систему на отдельные тела, вводить неизвестные внутренние силы, а затем исключать их из систем уравнений. Преимущества метода Лагранжа очевидны: нецелесообразно тратить время на обучение сначала заведомо нерациональным методам решения задач, а лишь затем демонстрировать преимущества новых более совершенных методов на тех же примерах.

Пример 2.

Материальная точка М движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню, вращающемуся с $\omega = const$ вокруг вертикальной оси. Стержень образует угол α с вертикалью. Найти закон движения точки.

$S = 1$ (так как дан закон $\omega = const$, то это рассматривается как наложение нестационарной связи) рис. 2;

$$q = \xi;\ V_r = \dot{\xi};\ V_e = \omega\xi\cos\alpha;\ \vec{V}_e \perp \vec{V}_r;$$

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}\left(V_r^2 + V_e^2\right) = \frac{m}{2}\left(\xi^2\omega^2\cos^2\alpha + \dot{\xi}^2\right); \tag{6}$$

$$\Pi = mgh = mg\xi\sin\alpha. \tag{7}$$

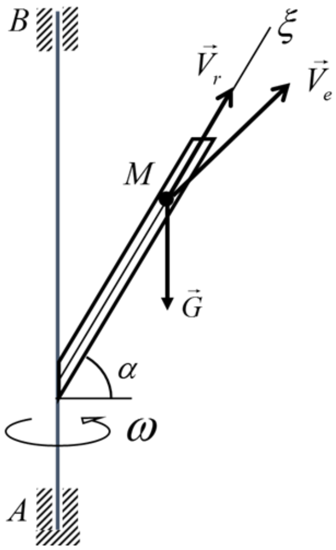

Рис. 2. Схема механизма 2

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \tag{8}$$

где $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}=m\dot{\xi};\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right)=m\ddot{\xi};\frac{\partial T}{\partial \xi}=m\xi\omega^2\cos^2\alpha$

Тогда $m\ddot{\xi}-m\xi\omega^2\cos^2\alpha=-mg\sin\alpha$. (9)

После сокращения на *m*

$$\ddot{\xi}-\xi\omega^2\cos^2\alpha=-g\sin\alpha\,. \tag{10}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, неоднородное со специальной правой частью. Решая его обычными методами, получим

$$\xi(t)=C_1e^{\omega t\cos\alpha}+C_2e^{-\omega t}+\frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha}\,. \tag{11}$$

Так как кроме потенциальной силы $\vec{G}$ другие активные силы не учитываются, то можно записать уравнение в форме Лагранжа через лагранжиан $L=T-\Pi$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\,. \tag{12}$$

Однако, можно, не составляя уравнение, получить его первый интеграл. Функция Лагранжа [2,3], вообще говоря, зависит не только от обобщенных координат и скоростей, но и от времени.

$$L=L\left(t,q_1,q_2,...,q_S,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_S\right). \tag{13}$$

Однако, на практике часто оказывается, что функция Лагранжа не зависит явно от времени. В этом случае существует обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби).

$$T_2 - T_0 + \Pi = const, \tag{14}$$

где T_2 и T_0 – слагаемые кинетической энергии, содержащие обобщенные скорости соответственно во второй и нулевой степенях. Полная кинетическая энергия равна $T = T_0 + T_1 + T_2$.

Если связи стационарны, то кинетическая энергия будет однородной квадратичной формой обобщенных скоростей.

$T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$ и интеграл Якоби превращается в обычный закон сохранения полной механической энергии системы $T = \Pi = const$.

В задаче вращение трубки по заданному закону означает наложение нестационарной связи, но так как по условию $\omega = const$, то L явно от времени не зависит. Значит справедлив интеграл Якоби

$$T_2 - T_0 + \Pi = const, \tag{15}$$

где $T_2 = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2; T_0 = \frac{m}{2}\xi^2\omega^2\cos^2\alpha$,

и, следовательно, $$\frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{m}{2}\xi^2\omega^2\cos^2\alpha + mg\xi\sin\alpha = const. \tag{16}$$

Преимущество этого равенства в том, что с его помощью можно установить связь между относительной скоростью точки и ее положением.

Пример 3.

Горизонтальная трубка может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Внутри трубки на расстоянии *a* от оси находится шарик М. В некоторый момент трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0. Определить угловую скорость ω в момент вылета шарика из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен I_z, l – ее длина. Шарик принять за материальную точку массой *m*. Трением пренебречь.

Эта задача (рис. 3) традиционно решается с применением закона сохранения кинетического момента системы относительно неподвижной оси вращения трубки (это решение всем хорошо известно и здесь не приводится). Применение уравнения Лагранжа дает тот же результат значительно быстрее. Система имеет две степени свободы (т.к. закон вращения трубки не задан, в отличие от предыдущей задачи).

$$q_1 = \varphi;\ S = 2;\ q_2 = \xi.$$

$$V_r = \dot{\xi};\ V_e = \xi\dot{\varphi};\ \vec{V}_r \perp \vec{V}_e.$$

$$T = \frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\varphi}^2 \xi^2\right);$$

$\varPi = const$ (можно принять её равной нулю), и тогда $L = T$.

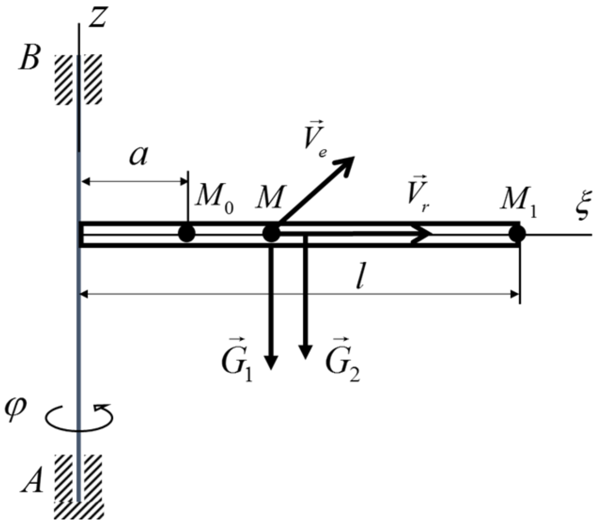

Рис. 3. Схема механизма 3

Очевидно, *T* явно не зависит от φ, т.е. φ является циклической координатой. Ей соответствует циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = const;$$

$$I_z \dot{\varphi} + m\dot{\varphi}\xi^2 = const$$

С учётом начальных условий

$\dot{\varphi}_0\left(I_z + ma^2\right) = \dot{\varphi}_1\left(I_z + ml^2\right)$, откуда

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 \frac{I_z + ma^2}{I_z + ml^2}. \tag{17}$$

Циклический интеграл выражает закон сохранения кинетического момента (в данном случае). Отметим, что составлять уравнения Лагранжа и в этой задаче необходимости нет. Кроме того, применение методики уравнений Лагранжа позволяет получить в этой модели дополнительную информацию, не предусмотренную применением закона сохранения кинетического момента, а именно: так как активные силы потенциальны и связи стационарны, то выполняется закон

$$T + \varPi = const. \tag{18}$$

А так как в данном случае $\varPi = const$, то и $T = const$.

$$\frac{\omega_0^2}{2}\left(I_z + ma^2\right) = \frac{\omega_1^2}{2}\left(I_z + ml^2\right) + m\frac{V_{1r}^2}{2}, \tag{19}$$

где $V_{1r} = \dot{\xi}$ – относительная скорость шарика в момент вылета из трубки.

Для нахождения ее без применения уравнений Лагранжа необходимо составить и интегрировать дифференциальное уравнение относительного движения, что при заранее неизвестном законе вращения трубки становится невозможным.

Список литературы

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учеб. пособие для вузов. – М.: Лань, 2010. – 720с.
2. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 392с.
3. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Лань, 2010. – 672с.

Сведения об авторах:

Погребная Людмила Ивановна – доцент кафедры механики СПбГТИ(ТУ), г.Санкт-Петербург;

Галуза Леонид Николаевич – старший преподаватель кафедры механики СПбГТИ(ТУ), г. Санкт-Петербург.