

## ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕХВАТА МАНЕВРИРУЮЩЕЙ ЦЕЛИ

*Паседько М.Ю., Сизова А.А., Лемешонок Т.Ю.*

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»  
имени Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург*

**Ключевые слова:** область достижимости, преследователь, маневрирующая цель, метод последовательных приближений, принцип максимума.

**Аннотация.** В данной работе предлагается использовать области достижимости для оценки возможности перехвата преследователем маневрирующей цели. Для этого предлагается рассчитать взаимное положение областей достижимости преследователя и маневрирующей цели для ряда будущих моментов времени, определить оптимальный гипотетический момент встречи, и по значению гипотетического промаха оценить возможность перехвата цели.

## APPLICATION OF REACHABILITY AREAS TO ASSESS THE CAPABILITIES OF INTERCEPTING A MANEUVERING TARGET

*Pasedko M.Yu., Sizova A.A., Lemeshonok T.Yu.*

*Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D.F. Ustinov,  
Saint-Petersburg*

**Keywords:** achievability area, pursuer, maneuvering target, method of successive approximations, maximum principle.

**Abstract.** In this paper, it is proposed to use the reachability areas to assess the possibility of interception by the pursuer of a maneuvering target. To do this, it is proposed to calculate the mutual position of the pursuer's and maneuvering target's reachability areas for a number of future time points, determine the optimal hypothetical moment of the meeting, and evaluate the expediency of launching the pursuer by the value of a hypothetical miss.

Область достижимости (ОД) представляет собой пространство, описывающее множество состояний, которые может достичь объект или система в заданный момент времени при учете его динамики и ограничений. При решении задачи сближения с маневрирующей целью области достижимости могут быть использованы для определения возможных траекторий цели, для оценки эффективности действий преследователя, а также для оценки возможности перехвата преследователем выбранной цели.

Возможность перехвата предлагается оценивать по величине гипотетического промаха преследователя, полученного при оптимальных действиях маневрирующей цели. Если данный промах в оптимальный гипотетический момент встречи не превышает радиус поражения преследователя, то будем считать, что перехват цели возможен.

Рассмотрим способ построения ОД преследователя с аэродинамическим управлением в вертикальной плоскости с включенным двигателем.

Движение преследователя и цели определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \frac{R_i - X_i}{m_i} - g \sin \theta_i; \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{R_i \alpha_i + Y_i}{m_i V_i} - \frac{g \cos \theta_i}{V_i}; \\ \frac{dy_i}{dt} &= V_i \sin \theta_i; \\ \frac{dx_i}{dt} &= V_i \cos \theta_i; \end{aligned} \tag{1}$$

где  $X = \frac{(C_{x0} + A\alpha^2)\rho S V^2}{2}$  – сила лобового сопротивления;  $Y = \frac{C_y^\alpha \alpha \rho S V^2}{2}$  –

подъемная сила;  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{y}{10000}}$  – плотность атмосферы на высоте  $y$ ;  $\rho_0$  – плотность атмосферы на уровне Земли;  $V$  – скорость;  $m$  – масса;  $\theta$  – угол наклона вектора скорости;  $C_{x0}$ ,  $C_y^\alpha$  – безразмерные аэродинамические коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы;  $A$  – коэффициент «отвала» поляры;  $S$  – площадь миделя;  $\alpha$  – угол атаки;  $R$  – тяга,  $G$  – сила тяжести;  $x$ ,  $y$  – координаты центра масс [1].

В (1) индекс  $i = 1$  соответствует преследователю, индекс  $i = 2$  – цели.

Управлением является угол атаки, который удовлетворяет ограничению:

$$|\alpha| \leq \alpha_{\text{доп}}. \tag{2}$$

Задано начальное положение преследователя при  $t = t_0$ :

$$V(t_0) = V_0, \theta(t_0) = \theta_0, y(t_0) = y_0, x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Выпуклая граница ОД строится по точкам. Для нахождения точек выпуклой границы ОД необходимо решить задачу о максимальном смещении преследователя в направлении вектора  $l$ .

В плоскости  $Oxy$  введем единичный вектор  $\bar{l} = \cos \xi \bar{i} + \sin \xi \bar{j}$ , направление которого определяется углом  $\xi$  между вектором  $\bar{l}$  и осью  $Ox$  (рис. 1).

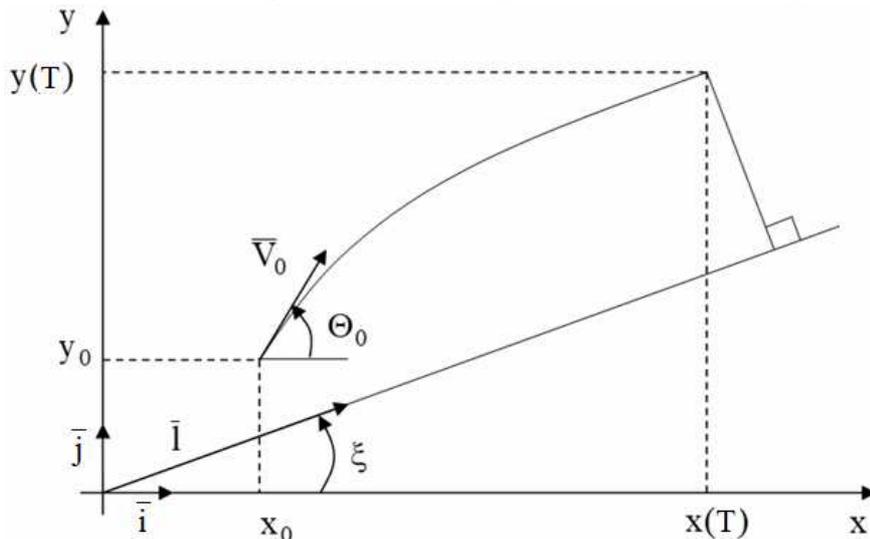


Рис. 1. Расчётная схема

Смещение преследователя в направлении вектора  $\bar{l}$  в момент  $T$  будем характеризовать скалярным произведением вектора  $\bar{l}$  и вектора  $z^T(T) = \{x(T), y(T)\}$ , т.е. функционалом следующего вида:

$$J = z^T(T)\bar{l} = x(T)\cos\xi + y(T)\sin\xi. \quad (4)$$

Для расчёта точки, расположенной на выпуклой границе ОД, требуется найти оптимальное управление, обеспечивающее максимум функционалу (4) в момент времени  $T$  при ограничении на управление и заданных начальных условиях. В результате решения данной задачи при определенном значении угла  $\xi$ , получим точку с координатами  $x(T)$  и  $y(T)$ , которая и будет являться точкой выпуклой границы ОД.

Таким образом, изменяя значение угла  $\xi$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  и решая задачу о максимальном смещении в заданном направлении, построим выпуклую границу ОД преследователя.

Данная задача решается с применением принципа максимума Л. С. Понтрягина. Для использования традиционной формы принципа максимума вместо максимума критерия (4) будем искать минимум следующего функционала:

$$J_1 = -x(T)\cos\xi - y(T)\sin\xi. \quad (5)$$

Таким образом, задача оптимального управления сводится к краевой задаче – найти решение системы уравнений (1), фазовые координаты которой удовлетворяют начальным условиям (3). Кроме того, согласно принципу максимума Понтрягина, функция Гамильтона при оптимальном управлении должна достигать максимума. Причем управление  $\alpha(t)$  должно удовлетворять ограничению (2) [2].

Функцию Гамильтона представим в виде:

$$H = H_0 + H_1\alpha^2 + H_2\alpha, \quad (6)$$

где  $H_0 = \Psi_V \left( \frac{R}{m} - C_{x0} \frac{S}{m} \frac{\rho V^2}{2} - g \sin\theta \right) - \Psi_\theta \frac{g \cos\theta}{V} + \Psi_y V \sin\theta + \Psi_x V \cos\theta$ ;

$$H_1 = -\Psi_V A \frac{S}{m} \frac{\rho V^2}{2}; \quad H_2 = \Psi_\theta \left( \frac{R}{mV} + \frac{C_y^\alpha S}{m} \frac{\rho V}{2} \right).$$

Здесь  $\Psi_V, \Psi_\theta, \Psi_y, \Psi_x$  – фазовые координаты сопряженной системы.

Функция  $H$  достигает максимума при следующих значениях управления:

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha^*(t), & \text{если } H_1 < 0, |\alpha^*(t)| \leq \alpha_{\text{доп}}; \\ \alpha_{\text{доп}} \text{sign}[\alpha^*(t)], & \text{если } H_1 < 0, |\alpha^*(t)| > \alpha_{\text{доп}}; \\ \alpha_{\text{доп}}, & \text{если } H_1 \geq 0, H_2 > 0; \\ -\alpha_{\text{доп}}, & \text{если } H_1 \geq 0, H_2 < 0; \\ \pm \alpha_{\text{доп}}, & \text{если } H_1 > 0, H_2 = 0; \\ 0V, & \text{если } H_1 = H_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\alpha^*(t)$  определяется из условия  $\left. \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = 0$ .

Возникшая в результате краевая задача решается модифицированным методом последовательных приближений И.А. Крылова, Ф.Л. Черноушко [3].

Для нахождения вогнутой границы ОД сначала интегрируется система уравнений (1) с начальными условиями (3) и функциями управления вида:

$$\alpha(t) = \begin{cases} +\alpha_{\text{доп}}, & t < t_{\Pi}; \\ -\alpha_{\text{доп}}, & t \geq t_{\Pi}, \end{cases} \quad (8)$$

а затем с функциями управления вида

$$\alpha(t) = \begin{cases} -\alpha_{\text{доп}}, & t < t_{\Pi}; \\ +\alpha_{\text{доп}}, & t \geq t_{\Pi}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $t_{\Pi}$  – момент смены знака управления,  $t_0 \leq t_{\Pi} \leq T$ . В результате получаем кривую, соответствующую вогнутой части границы ОД.

Для расчета ОД цели использовался аналогичный способ.

Принятые при моделировании характеристики преследователя представлены в таблице 1. Начальные данные преследователя представлены в таблице 2.

Табл. 1. Характеристики преследователя

$S, \text{ м}^2$	$R, \text{ Н}$	$Q, \text{ кг/с}$	$m, \text{ кг}$	$\alpha_{\text{доп}}, \text{ град}$
0,053	12000	4	350	20

Табл. 2. Начальные данные преследователя

$t_0, \text{ с}$	$V_0, \text{ м}$	$\theta_0, \text{ град}$	$y_0, \text{ м}$	$x_0, \text{ м}$	$\rho_0, \text{ м/с}^2$
0	750	45	10000	10000	1,225

Для сокращения количества вычислений ОД преследователя рассчитывается не с момента старта, а с момента его вывода в упрежденную точку траектории. Предполагается, что до вывода в упрежденной точку управление преследователя осуществляется по заранее заданной программе.

Характеристики цели представлены в таблице 3. Начальные данные цели представлены в таблице 4. Для оценки возможности перехвата цели, и как следствие целесообразности пуска преследователя, рассмотрено два возможных начальных положения цели.

Табл. 3. Характеристики цели

$S, \text{ м}^2$	$R, \text{ Н}$	$Q, \text{ кг/с}$	$M, \text{ кг}$	$\alpha_{\text{доп}}, \text{ град}$
0,22	2700	1	1000	20

Табл. 4. Начальные данные цели для двух вариантов положения

№	$V_0, \text{ м}$	$\theta_0, \text{ град}$	$y_0, \text{ м}$	$x_0, \text{ м}$	$\rho_0, \text{ м/с}^2$
1	250	180	13000	12000	1,225
2			14000	14000	

Для расчёта оптимального момента времени встречи необходимо найти гипотетический промах  $\varepsilon$ , т.е. расстояние между наиболее удалённой точкой ОД цели от ОД преследователя и наиболее приближенной к ней точкой ОД преследователя. В большинстве случаев наиболее удалёнными точками ОД цели являются угловые точки.

Расчёт ОД преследователя и цели происходит до того момента времени  $T$ , пока промах  $\varepsilon$  не начнет увеличиваться или не станет отрицательным [4]. Данный момент времени  $\tilde{T}$  принимается за оптимальный гипотетический момент времени встречи.

Расчитанные значения промахов  $\varepsilon$  и оптимального гипотетического момента времени встречи представлены в таблице 5.

Табл. 5. Промах и оптимальный гипотетический момент времени встречи для двух начальных положений цели

№	$\varepsilon$ , м	$\tilde{T}$ , с
1	337	4,7
2	17	6,6

Взаимное расположение областей достижимости преследователя и цели для различных гипотетических моментов времени встречи при разных начальных положениях цели представлено на рисунке 2.

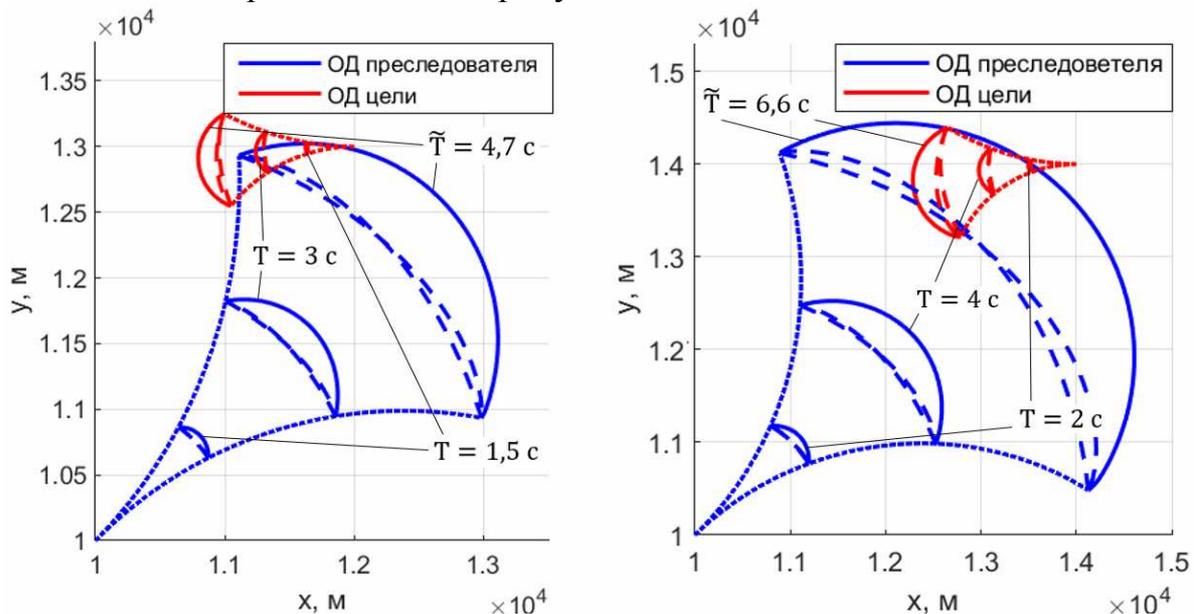


Рис. 2. ОД преследователя и цели для двух начальных положений цели

Оценивая взаимное положение ОД преследователя и цели для оптимального гипотетического момента времени встречи, а также значение гипотетического промаха, предлагается оценить возможность перехвата цели преследователем, находящимся в заданных начальных координатах.

Например, по полученным значениям промаха  $\varepsilon$  и графикам можно сделать вывод, что в первом случае преследователь не сможет перехватить цель. Значение гипотетического промаха слишком велико, а области достижимости преследователя и цели не пересекаются в момент времени  $T$ . Таким образом, при

таким начальном взаимном положении преследователя и цели перехват невозможен.

Во втором случае ОД пересекаются, при этом ОД цели практически полностью находится в ОД преследователя. Даже при оптимальных действиях цели промах составит всего 17 м. Перехват при данном начальном положении цели возможен.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что ОД можно использовать для оценки возможности перехвата маневрирующей цели. Также можно предположить, что ОД можно довольно эффективно использовать для распределения целей при сближении их с группой преследователей.

#### **Список литературы**

1. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
2. Толпегин О.А. Дифференциально-игровые методы управления движением беспилотных летательных аппаратов. – СПб.: БГТУ «Военмех», 2009. – 242 с.
3. Толпегин О.А. Области достижимости летательных аппаратов. – СПб.: БГТУ «Военмех», 2013. – 139с.
4. Демьянов В.Ф., Малозеров В.Н. Введение в минимакс – М.: Наука, 1972. – 368 с.

#### Сведения об авторах:

*Паседа́ко Мари Юрьевна* – магистрант;

*Сизова Анастасия Александровна* – к.т.н., доцент кафедры А5 «Динамика и управление полетом летательных аппаратов»;

*Лемешонок Татьяна Юрьевна* – к.т.н., доцент кафедры А5 «Динамика и управление полетом летательных аппаратов».