УДК 519.71, 629.4.015, 62-752, 534.015 https://doi.org/10.26160/2309-8864-2022-13-96-105

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ СВЯЗНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КАРТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Елисеев А.В., Миронов А.С.
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск

Ключевые слова: структурные методы математического моделирования, механические колебательные системы, режимы динамического гашения колебаний, передаточные функции, динамическая податливость, связность внешних силовых возмущений, колебание твердого тела, карта динамических инвариантов.
Аннотация. Развивается методология структурного математического моделирования, в рамках которой, механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов транспортного и технологического назначения, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Для оценки состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем разработана концепция так называемых инвариантов динамической податливости, представляющей собой отношение амплитуд колебаний точек твердого тела к амплитудам силового возмущения с учетом его частоты. Для системы, образованной твердым телом, рассматривается семейство податливостей, определяемых координатами точек, динамические состояния которых оцениваются, и коэффициентами связности внешних силовых возмущений. Для множества пар значений «координата точки - коэффициент связности» построено распределение динамических инвариантов плоскости в виде своеобразной карты областей, границ и точек, на которых сохраняются динамические инварианты податливости. Определена совокупность множеств параметров, в которых система обладает различными динамическими свойствами: имеет один или два резонанса, допускает или исключает возможность реализации режимов динамического гашения колебаний, принимает положительные, отрицательные или вырожденные формы динамических взаимодействий элементов.

ESTIMATING THE DYNAMIC FEATURES OF TECHNICAL OBJECTS UNDER CONDITIONS OF CONNECTED VIBRATION LOAD BASED ON A MAP OF DYNAMIC INVARIANTS

Eliseev A.V., Mironov A.S.
Irkutsk State Transport University, Irkutsk

Keywords: structural methods of mathematical modeling, mechanical oscillatory systems, modes of dynamic vibration damping, transfer functions, dynamic compliance, connectivity of external force disturbances, solid body oscillation, map of dynamic invariants.
Abstract. The methodology of structural mathematical modeling is being developed, within the framework of which the schemes of dynamically equivalent automatic control systems are compared to mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects of transport and technological purposes. To assess the states and forms of dynamic interactions of elements of mechanical oscillatory systems, the concept of so-called dynamic compliance invariants has been developed, which is the ratio of the oscillation amplitudes of points of a solid to the amplitudes of a force disturbance taking into account its frequency. For a system formed by a solid body, a family of pliability is considered, determined by the coordinates of the points whose dynamic states are estimated, and the coefficients of connectivity of external force disturbances. For the set of pairs "point coordinate - connectivity coefficient", a distribution of dynamic invariants is constructed in the form of a kind of map of regions, boundaries and points on which these dynamic invariants are

preserved. The sets of parameters in which the system has different dynamic properties are determined: it has one or two resonances, allows or excludes the possibility of implementing modes of dynamic damping of vibrations, accepts positive, negative or degenerate forms of dynamic interactions of elements.

Введение. В настоящее время значительное внимание уделяется вопросам динамического качества работы технических объектов транспортного и технологического назначения [1, 2]. Оценка, контроль формирование и управление динамическим качеством технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы, предполагает развитие методологического базиса решения широкого круга модельных задач динамики твердого тела, отображающих разнообразие динамических состояний.

В качестве научно-методологической основы, в рамках которой возможно проведение поисковых исследований, обладающих потенциалом решения крупных научных проблем, связанных с оценкой, контролем, формированием и управлением динамических состояний технических объектов транспортного и технологического назначения в условиях вибрационных нагружений могут быть использованы методы структурного математического моделирования [3, 4].

Структурные подходы находят применение в задачах виброзащиты и виброизоляции, в задачах формирования динамических взаимодействий элементов вибрационных технологических машин с учетом неудерживающих связей, в задачах динамики машин с учетом дополнительных связей, в задачах управления мехатронными системами, для оценки динамических состояний технических объектов в условиях вибрационного нагружения [3-6].

Существенные особенности динамических состояний механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем технических объектов могут быть отображены на основе так называемых динамических инвариантов амплитудно-частотных характеристик передаточных функций, с физической точки зрения интерпретируемых как динамические податливости [7, 8].

Динамический инвариант с обобщенной точки зрения отображает количество режимов обнуления амплитуд колебаний координат объекта, число резонансов и знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, особенности которых оцениваются на основе соответствующих передаточных функций.

Динамические инварианты могут быть построены для семейства механических колебательных систем, в которых вариационными параметрами служат коэффициент связности внешних возмущений, а фиксированным параметром является координата точки твердого тела, динамическое состояние которой оценивается. Многообразие динамических состояний может быть представлено в виде графика интегральной характеристики, сопоставляющей каждому коэффициенту связности общее количество динамических особенностей. Аналогично, вариационным параметром может служить точка твердого тела, динамическое состояние которой оценивается, а коэффициент связности внешних возмущений служит константой. В этом случае может быть построена интегральная характеристика в виде распределения динамических особенностей по точкам твердого тела. Одновременное варьирование коэффициента связности и координаты оцениваемой точки твердого тела приводит к построению так называемой карты динамических инвариантов, которая на плоскости параметров определяет области, кривые и специфические точки с постоянными динамическими инвариантами.

Вместе с тем, методы построения карт динамических инвариантов связаны с рассмотрением варьируемых параметров системы в широких диапазонах, что предполагает рассмотрение на начальных этапах исследования локальных карт динамических инвариантов.

Предлагаемая статья посвящена разработке метода построеня карты динамических инвариантов податливостей механических колебательных систем при варьировании параметров в локальной области.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом с массой M и моментом инерции J. Твердое тело установлено в точках т.A и т.B на упругие опоры с жесткостями k_1, k_2 (рис. 1). Предполагается, что внешние силовые возмущения Q_1, Q_2, приложенные к т.A и т.B твердого тела связаны между собой условием:

$$Q_2=\gamma Q_1, \tag{1}$$

где γ – коэффициент связности возмущений Q_1, Q_2, представляющих собой синфазные гармонические колебаний с частотой ω. Под воздействием внешних возмущений (1) система (рис. 1) совершает малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия. В зависимости от коэффициента связности γ совокупность динамических состояний может быть охарактеризована амплитудно-частотными характеристиками передаточной функции, для которой входным сигналом служит силовое возмущение Q_1, а выходным сигналом – смещение y_h т.H, расположенной на поверхности твердого тела на расстоянии h от центра тяжести т.O. В зависимости от коэффициента связности γ и координаты h т.H возможны реализации различных совокупностей динамических состояний, которые могут быть отображены в виде амплитудно-частотных характеристик.

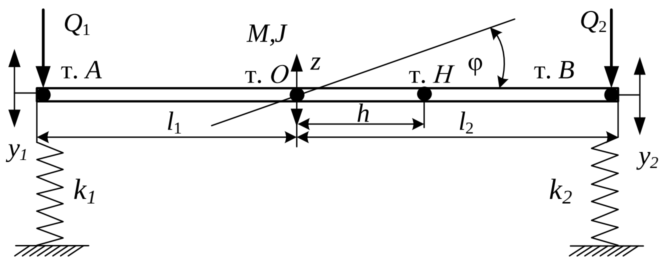

Рис. 1. Механическая колебательная система

Задача заключается в определении существенных особенностей динамических состояний системы в зависимости от координаты точки, динамическое состояние которой оценивается, и коэффициента связности, варьируемых в некоторой окрестности нуля.

II. Математическая модель. В качестве обобщенных координат могут быть рассмотрены $\{y_1, y_2\}$ – смещения тт. A и B твердого тела относительно положения статического равновесия и значения $\{\varphi, z\}$, где φ – угол поворота твердого тела относительно центра тяжести, z – величина вертикального смещения центра тяжести относительно положения статического равновесия (рис. 1). С учетом геометрических характеристик l_1 и l_2 системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны зависимостями

$$\begin{cases} z = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (2), \qquad \begin{cases} y_1 = z - l_1\varphi \\ y_2 = z + l_2\varphi \end{cases}, \quad (3)$$

где $a = \dfrac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \dfrac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \dfrac{1}{l_1 + l_2}$. (4)

Для построения математической модели используется формализм уравнений Лагранжа 2-ого рода. Выражения для потенциальной и кинетической энергий могут быть представлены с учетом координат y_1, y_2, φ, z:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 y_2^2, \quad (5)$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\varphi^2. \quad (6)$$

В координатах $\{y_1, y_2\}$ система дифференциальных уравнений Лагранжа 2-ого рода принимает вид:

$$\begin{cases} (Ma^2 + Jc^2)\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (Mab - Jc^2)\ddot{y}_2 = Q_1 \\ (Mab - Jc^2)\ddot{y}_1 + (Mb^2 + Jc^2)\ddot{y}_2 + k_2 y_2 = Q_2 \end{cases}. \quad (7)$$

После преобразований Лапласа [Лурье] система дифференциальных уравнений (7) приводится к виду системы алгебраических уравнений относительно комплексной переменной p:

$$\begin{cases} ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\bar{y}_1 + (Mab - Jc^2)p^2\bar{y}_2 = \bar{Q}_1 \\ (Mab - Jc^2)p^2\bar{y}_1 + ((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2)\bar{y}_2 = \bar{Q}_2 \end{cases}. \quad (8)$$

На основе известных методов [3] алгебраическая система (8) может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 2)

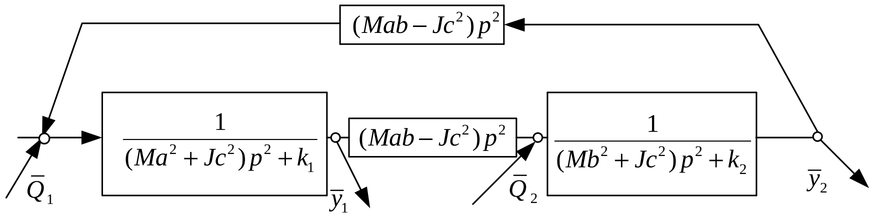

Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы (рис.1), $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, ω – частота внешнего возмущения, символ «-» над переменной обозначает изображение Лапласа [9]

На основе структурной схемы (рис. 2) могут быть получены передаточные функции системы с учетом коэффициента связности γ, рассматриваемого в качестве параметра:

$$W_{11}(p,\gamma) = \left.\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \gamma(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (9)$$

$$W_{21}(p,\gamma) = \left.\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}\right|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\gamma - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (10)$$

где $A(p)=((Ma^2+Jc^2)p^2+k_1)((Mb^2+Jc^2)p^2+k_2)-((Mab-Jc^2)p^2)^2$ (11)

является характеристическим многочленом с корнями σ_1^2, σ_2^2, представляющими собой собственные частоты механической колебательной системы (рис. 1).

Для оценки динамических состояний т.H, расположенной на расстоянии h от центра тяжести, может быть построена передаточная функция динамической податливости:

$$W_h(p) = (a - ch)W_{11}(p) + (b + ch)W_{21}(p), \qquad (12)$$

где h и γ рассматриваются как параметры.

Многообразие амплитудно-частотных характеристик (12) может быть представлено конечным набором динамических инвариантов, отображающих особенности в виде количества резонансов, частот обнуления амплитуд колебания смещения объекта в т.H, форм динамического взаимодействия элементов механической колебательной системы в условиях вибрационного нагружения силовой природы. Семейство амплитудно-частотных характеристик, где коэффициент связности γ рассматривается как параметр, определяется выражением:

$$A_h(\omega, \gamma) = W_h(p)\Big|_{p=j\omega}. \qquad (13)$$

Условие равенства нулю числителя амплитудно-частотной характеристики (13) позволяет выразить частоту ω, на которой в точке с координатой h при внешнем возмущении Q_1 и $Q_2=\gamma Q_1$ может реализоваться обнуление амплитуды колебания. Таким образом, для фиксированного коэффициента связности γ может быть определена функция обнуления $\omega(\gamma,h)>0$, которая каждому значению координаты h позволяет сопоставить частоту внешнего возмущения согласно выражения:

$$\omega^2(\gamma, h) = \frac{c(k_1\gamma - k_2)h + (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)h + Jc^2(\gamma + 1)}. \qquad (14)$$

Расположение значений частотной функции обнуления относительно собственных частот системы позволяет определить динамические инварианты для координаты h твердого тела (рис. 3). В свою очередь совместное варьирование коэффициента γ и параметра h позволяет определить динамические инварианты для произвольной пары значений (γ, h). Сопоставление каждой точке (γ, h) плоскости параметров динамического инварианта позволяет разбить плоскость на множества, в которых динамические инварианты сохраняют свои значения.

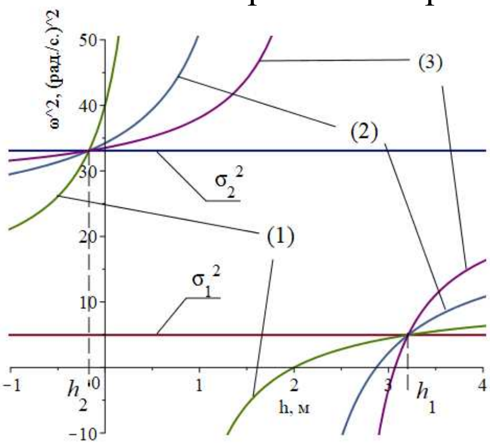

Рис. 3. Частотные функции обнуления для фиксированных значений коэффициентов связности γ: (1) – γ=0; (2) – γ=0.3; (3) – γ=0.35

Для разбиения множества параметров на области, в которых динамические инварианты сохраняются, могут быть использованы функциональные зависимости, отображающие граничные особенности частотных функций обнуления:

$$h_0(\gamma) = -\frac{bk_1\gamma + ak_2}{c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (15) \qquad h_{kp}(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma+1)}{Mc(a\gamma - b)}, \quad (16)$$

$$h_1(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma+1)\sigma_1^2 - (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)\sigma_1^2 - c(k_1\gamma - k_2)}, \quad (17)$$

$$h_2(\gamma) = -\frac{Jc^2(\gamma+1)\sigma_2^2 - (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)\sigma_2^2 - c(k_1\gamma - k_2)}. \quad (18)$$

Можно полагать, что $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma)$ – постоянные функции. Критические значения коэффициентов связности γ_1, γ_2 могут быть найдены из условия равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} c(k_1\gamma - k_2) & bk_1\gamma + ak_2 \\ Mac\gamma - Mbc & Jc^2(\gamma+1) \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Совокупность функций $h_0(\gamma)$, $h_{\text{кр}}(\gamma)$, $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma)$ и критические значения $\gamma = \gamma_1$, $\gamma = \gamma_2$ определяют разбиение множества параметров $\Omega=[\gamma_1,\gamma_2]\text{x}[h_1, h_2]$, представляющего собой окрестность точки начала координат.

Можно показать, что границы Γ_{32}, Γ_{34} определяются значения коэффициента связности γ_1,γ_2; Γ_{43}, Γ_{23} – координатами h_2, h_1; Γ_{11}, Γ_{33} – функциями $h_0(\gamma)$, $h_1(\gamma)$, относительное расположение которых определяется знаком выражения b/a - k_2/k_1 (рис. 4).

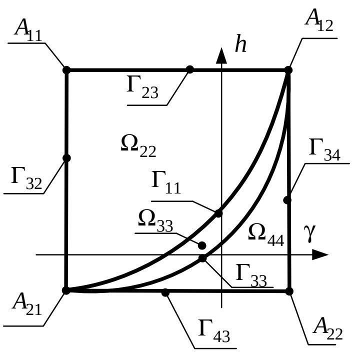

Рис. 4. Разбиение ограниченного множества параметров $\Omega=[\gamma_1, \gamma_2]\text{x}[h_1, h_2]$ при условии b/a - $k_2/k_1<0$

На начальном этапе для детализации представлений о разнообразии динамических состояний механической колебательной системы может быть построена карта динамических инвариантов для ограниченного множества параметров $\Omega = [\gamma_1, \gamma_2]$ x $[h_1, h_2]$ в окрестности нулевых значений параметров $\gamma=0$, $h=0$.

III. Определение динамических инвариантов на основе амплитудно-частотных характеристик передаточной функции динамической податливости объекта. В предположении $b/a < k_2/k_1$ рассматривается разбиение множества $\Omega = [\gamma_1, \gamma_2]$ x $[h_1, h_2]$ на области Ω_{22}, Ω_{33}, Ω_{44}, границы Γ_{23}, Γ_{32}, Γ_{34}, Γ_{43}, Γ_{11}, Γ_{33} и точки A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}. Динамические инварианты на каждом множества разбиения могут быть представлены амплитудно-частотными характеристиками (рис.5). На границе Γ_{11} амплитудно-частотные характеристики определяется выражением:

$$A_{\Gamma_{11}}(\omega,\gamma) = A_h(\omega,\gamma)\big|_{h=h_0(\gamma)} =$$

$$= -\frac{[J(\gamma+1)c^2(k_1\gamma - k_2) + M(bk_1\gamma - ak_2)(b\gamma - a)]\omega^2}{(k_1\gamma - k_2)(MJc^2\omega^4 - ((k_1+k_2)Jc^2 + (a^2k_1 + b^2k_2)M)\omega^2 + k_1k_2)}, \quad (20)$$

Соответствующий динамический инвариант $S_1^2F_1^2$отображает один режим обнуления амплитуды колебания координаты на бесконечно малой частоте ω=0, два резонанса, две положительные и одну отрицательную формы динамических взаимодействий (рис.5а). На границе Γ_{33}, которая определяется кривой (16) $h=h_{\text{кр}}(\gamma)$, $\gamma\in(\gamma_1,\gamma_2)$, соответствующая амплитудно-частотная характеристика задается выражением:

$$A_{\Gamma_{33}}(\omega,\gamma)=A_h(\omega,\gamma)\Big|_{h=h_{kp}(\gamma)}=$$

$$=\frac{M(bk_1\gamma-ak_2)(a\gamma-b)-J(\gamma+1)c^2(k_1\gamma-k_2)}{M(a\gamma-b)(MJc^2\omega^4-((k_1+k_2)Jc^2+(a^2k_1+b^2k_2)M)\omega^2+k_1k_2)}. \quad (21)$$

Существенные особенности семейства амплитудно-частотных характеристик (21) отображаются динамическим инвариантом $S_0^2F_1^2$.

На рассматриваемом множестве система не имеет режимов динамического гашения, но обладает двумя резонансами(рис.5б). На границе Γ_{23}, $h=h_1$, $\gamma\in(\gamma_1, \gamma_2)$ амплитудно-частотная характеристика определяется выражением:

$$A_{\Gamma_{23}}(\omega,\gamma)=A_h(\omega,\gamma)\Big|_{h=h_1}, \quad (22)$$

где $h_1=-\dfrac{Jc2(-\sigma_1^2)+k_1b}{(Ma(-\sigma_1^2)+k_1)c}$. (23)

Динамический инвариант $S_0^1F_1^1(J_3)$ имеет три особенности: один резонанс, две знакоопределенных формы (рис. 5в).

На границе Γ_{43}, $h=h_2$, $\gamma\in(\gamma_1, \gamma_2)$ семейство амплитудно-частотных характеристик определяется выражением:

$$A_{\Gamma_{43}}(\omega,\gamma)=A_h(\omega,\gamma)\Big|_{h=h_2}, \quad (24)$$

где $h_2=-\dfrac{Jc2(-\sigma_2^2)+k_1b}{(Ma(-\sigma_2^2)+k_1)c}$. (25)

Соответствующий точкам границы Γ_{43}, имеет динамический инвариант Γ_{43}-$S_0^1F_1^1(J_3)$ (рис. 5г).

На границе Γ_{32}, $\gamma=\gamma_1$, $h\in(h_1, h_2)$ семейство амплитудно-частотных характеристик имеет вид:

$$A_{\Gamma_{32}}(\omega,h)=A_h(\omega,\gamma)\Big|_{\gamma=\gamma_1}, \quad (24)$$

где γ_1 – наименьший корень уравнения (19).

Амплитудно-частотные характеристики семейства имеют динамический инвариант $S_0^1F_1^1(J_3)$ (рис. 5д). На границе Γ_{34}, $\gamma=\gamma_2$, $h\in(h_1, h_2)$ семейство амплитудно-частотных характеристик имеет вид:

$$A_{\Gamma_{34}}(\omega,h)=A_h(\omega,\gamma)\Big|_{\gamma=\gamma_2}, \quad (27)$$

где γ_2 наибольший корень уравнения (19). Амплитудно-частотные характеристики обладают динамическим инвариантом $S_0^1F_1^1(J_3)$ (рис. 5е).

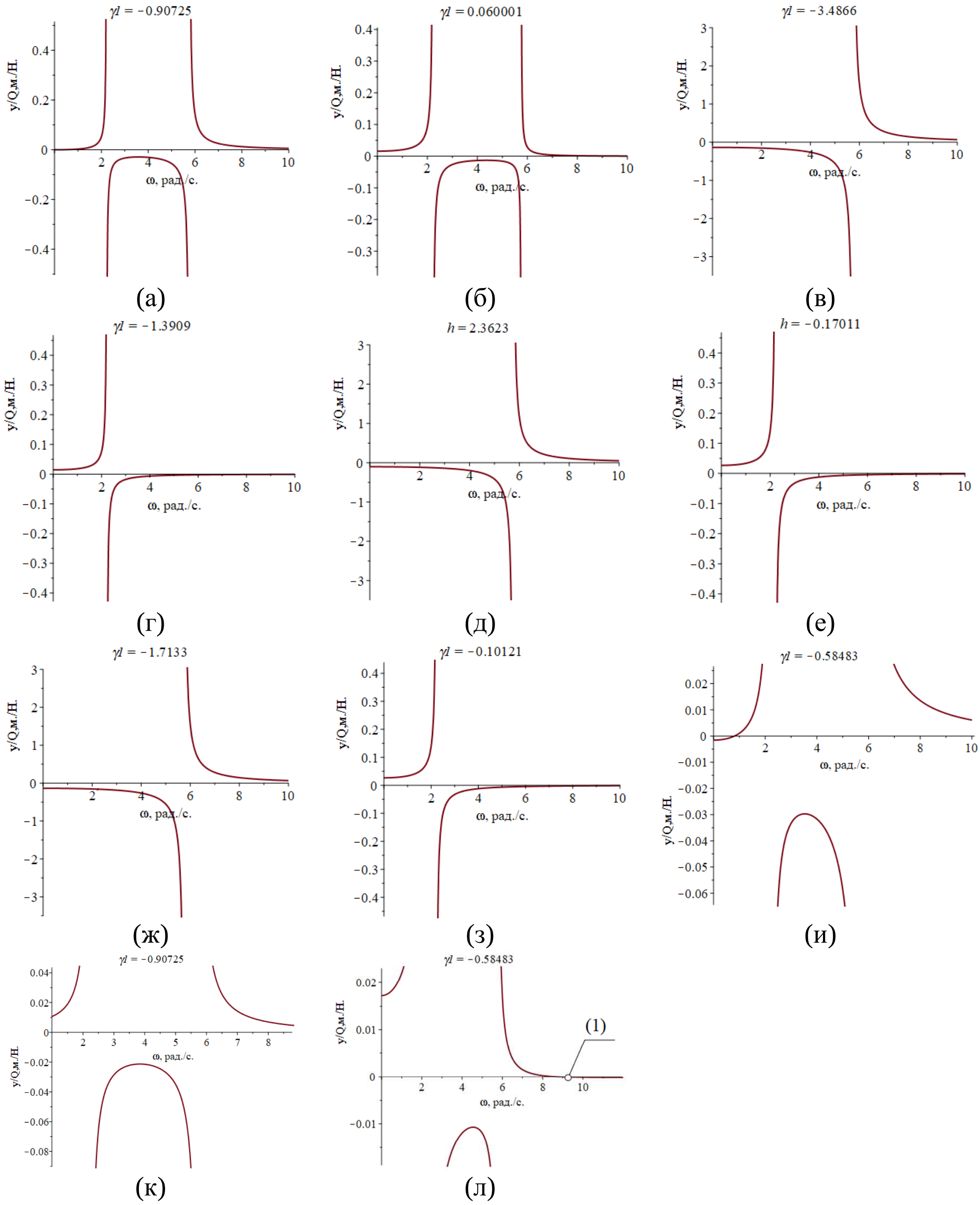

Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики элементов разбиения: (а) – Γ_{11}-$S_1^{\,2}F_1^{\,2}(J_6)$; (б) – Γ_{33} - $S_0^{\,2}F_1^{\,2}(J_5)$; (в) – Γ_{23} - $S_0^{\,1}F_1^{\,1}(J_3)$; (г) – Γ_{43} - $S_0^{\,1}\mathrm{F}_1^{\,1}(J_3)$; (д) – Γ_{32}-$S_0^{\,1}F_1^{\,1}(J_3)$; (е) – Γ_{34} - $S_0^{\,1}F_1^{\,1}(J_3)$; (ж) – A_{11} - $S_0^{\,1}F_1^{\,1}$ (J_3); (з) – A_{22} - $S_0^{\,1}F_1^{\,1}$ (J_3); (и) – Ω_{22} - $S_1^{\,2}F_2^{\,2}(J_7)$; (к) – Ω_{33} - $S_0^{\,2}F_1^{\,2}$ (J_5); (л) – Ω_{44} - $S_1^{\,2}F_2^{\,2}(J_7)$:

IV. Построение фрагмента карты динамических инвариантов податливости. На основе динамических инвариантов соответствующих амплитудно-частотных характеристик (рис. 5) может быть построена карта динамических инвариантов для множества параметров Ω (рис. 6).

Карта сопоставляет каждой области, границе и узловой точке множества *Ω* фиксированный динамический инвариант, сохраняющийся на соответствующем множестве.

Построенная карта динамических инвариантов (рис. 6) позволяет отображать специфические особенности динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем. Для случая некоторого внешнего возмущения с фиксированной частотой можно определить связь между коэффициентами связности внешних возмущений γ и координатой h, в которой реализуется обнуление динамической податливости точки твердого тела. Можно полагать, что точка с нулевой податливостью представляет собой узел колебания. Координата узла колебаний зависит от особенностей приложения внешнего силового возмущения с фиксированной частотой возмущения (рис. 7).

Характерным примером использования карты динамических инвариантов может служить задача определения координаты точки динамического гашения на фиксированной частоте в зависимости от связности внешних возмущений. На фиксированной частоте внешних возмущений каждому коэффициенту связности γ может быть сопоставлена точка твердого тела, в которой реализуется режим обнуления амплитуд колебания (рис. 7, линия 1). Можно показать, что для частот внешних возмущений аналогичные кривые проходят через общие точки, существование которых показывает, что для граничных значений коэффициентов связности γ_1, γ_2 возможна реализация таких режимов динамического гашения колебаний, для которых положение узла колебаний перестает зависеть от частоты внешнего возмущения.

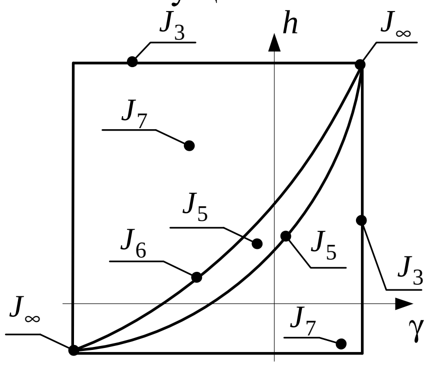

Рис. 6. Фрагмент карты динамических инвариантов заданных на множестве параметров Ω

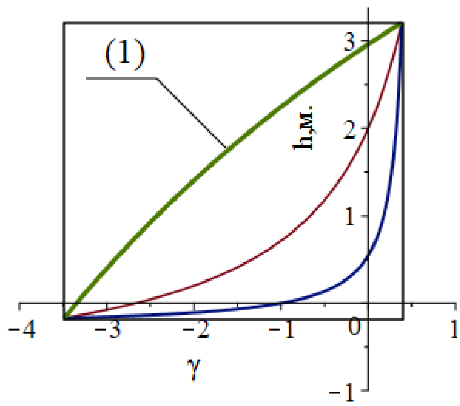

Рис. 7. Зависимость координаты узла колебания h и коэффициента связности γ внешних силовых возмущений для фиксированной частоты ω=2 рад./с

Заключение. В рамках структурного математического моделирования разработана концепция динамических инвариантов для задач оценки состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, образованных твердым телом, находящемся в условиях вибрационных нагружений. Для механических колебательных систем с двумя степенями свободы построен фрагмент карты динамических инвариантов податливостей.

Для рассматриваемой области параметров, представляющих собой координаты точек, динамические состояния которых оцениваются, и коэффициенты связности внешних возмущений, формирующих динамическое состояние объекта, определена совокупность возможных динамических состояний, характеризующихся динамическими инвариантами. Определено распределение динамических инвариантов на рассматриваемой области параметров. Представлены методы использования карты динамических инвариантов для построения специфических режимов колебания твердого тела.

Список литературы

1. Piersol, A. and Paez, T. Harris' Shock and Vibration Handbook. – Mcgraw-Hill. 2009. – 1168 p.
2. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press. 2006, 1064 p.
3. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing, Cham. 2020, vol.252, 521 p.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Каимов Е.В. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации // Депонированная рукопись. – № 230 – В 2013 02.08.2013.
5. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1 (49). – С. 33-41.
6. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неудерживающих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4 (40). – С. 51-60.
7. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Николаев А.В. Концепция динамических инвариантов в оценке структурных особенностей механических колебательных систем // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2022. – №15. – С. 18-30.
8. Елисеев А.В., Миронов А.С. Методы структурного математического моделирования в разработке концепции динамических инвариантов механических колебательных систем // Депонированная рукопись. – № 10-В2022 25.04.2022.
9. Лурье, А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.

<u>Сведения об авторах:</u>
Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры математики;
Миронов Артем Сергеевич – соискатель.