

ИДЕИ В НАУЧНОМ ТВОРЧЕСТВЕ И УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Бохонский А.И., Варминская Н.И.

*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,
Севастополь*

Ключевые слова: идеи в науке и учебном процессе (история и современность), постановка задач, появление методов, примеры из механики.

Аннотация. На относительно простых примерах с учетом многолетнего опыта преподавания теоретической и прикладной механики и привлечения студентов к участию в научных исследованиях рассматривается и раскрывается механизм постановки новых задач и появления идей, как в истории становления классической механики, так и при преподавании фундаментальных дисциплин. Осуществлялась попытка раскрыть таинственную особенность возникновения идей в науке и преподавании технических дисциплин. С этой целью широко привлечены примеры, как из истории технических наук, так и из опыта преподавания преимущественно теоретической и прикладной механики. Обращено внимание на отражение механического взаимодействия и движения в математических моделях.

IDEAS IN SCIENCE AND EDUCATION

Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I.

Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol

Keywords: ideas in science and educational process (history and modernity), problem setting, the emergence of methods, mechanics examples.

Abstract. Based on relatively simple examples, taking into account many years of experience in teaching theoretical and applied mechanics and involving students in scientific research, the mechanism for setting new research problems and the emergence of ideas is considered and revealed, both in the history of classical mechanics and in teaching fundamental disciplines. An attempt was made to reveal the mysterious feature of the emergence of ideas in science and the teaching of technical disciplines. For this purpose, examples are widely used, both from the history of natural science and from the experience of teaching mainly theoretical and applied mechanics. Attention is drawn to the reflection of mechanical interaction and movement in mathematical models.

*При изучении наук примеры полезнее правил.
И. Ньютон*

*Людей высокого ума ничем нельзя больше
привлечь к работе, как указав им трудную и
вместе с тем почетную задачу...*

И. Бернулли

Введение

Осуществляется попытка снять покров таинственности с возникновения идей в научном творчестве и учебном процессе. Часто появление идеи обязано интуиции, как нестрогую продукту мышления; иногда интуитивное мышление приводит к удачной аналогии, которую можно рассматривать как новую идею. Тайна возникновения новых идей, видимо, никогда не будет исчерпывающим образом раскрыта. Однако, доподлинно известно – для упорно ищущего решение актуальной задачи вероятность успеха возрастает!

Замечательные примеры появления плодотворных идей как торжества интуиции известны из истории становления и развития теоретической и прикладной механики. Хотя необычайно впечатляющие идеи появляются в отдельных относительно узких областях прикладных технических наук и широкому кругу специалистов из многих других областей остаются неизвестными, но их значимость и сам процесс появления, гносеологическая и практическая ценность для этой области заслуживают самого пристального изучения [1].

На ряде примеров из истории естественных наук и преподавания теоретической и прикладной механики обсуждаются некоторые особенности зарождения идей как катализаторов научного творчества и совершенствования учебного процесса.

Необходимым условием появления идей в науке и образовании является, безусловно, интенсивный труд и среда, которая окружает исследователя, а достаточным – индивидуальные качества: фантазия, интуиция, оригинальность мышления и, конечно, его величество случай. Серьезные идеи и даже фундаментальные теории порой могут возникать на основании подмеченных достаточно простых закономерностей и фактов.

История естествознания, например, дает убедительные примеры зарождения фундаментальных идей исключительно на гуманитарном уровне – на основании качественного анализа явлений. И. Грекова писала: «Применение математических методов не полезно, а вредно до тех пор, пока явление не обосновано на гуманитарном уровне». Новые идеи в технических науках совсем необязательно должны возникать в виде физических или математических образов – не исключается их появление на гуманитарном уровне представлений об исследуемом явлении или объекте.

Из истории науки известно, что авторитет генератора некоторых ошибочных идей был столь высок, что его идеи господствовали сотни лет. Однако в данной статье не будем останавливаться на тех идеях, которые оказались несостоятельными, не выдержали испытаний временем и умерли “естественной смертью”.

В нынешних условиях принципиальное значение имеет, прежде всего, раскрытие тайн зарождения математических моделей. Интересные идеи и задачи, как сказки о реальном мире, не редко сочиняются и решаются на основании правдоподобных рассуждений, опыта и энтузиазма авторов.

Психологи, например, свыше ста лет заняты исследованиями мыслительных процессов, связанных с возникновением идей при решении трудных задач, но и до настоящего времени многие тонкости творческого процесса (порой мучительного!) поиска решений оригинальных задач не раскрыты. К.Э. Циолковский писал: «Сначала идут: мысль, фантастика, сказка, за ними следует научный расчет».

Цель исследования – обратить внимание на некоторые особенности формулирования новых актуальных задач исследований и появления идей в научном творчестве и учебном процессе.

В статье приведены поучительные примеры из истории: драматическое возникновение принципа наименьшего действия в механике (Мопертьюи, 1747г.);

появление методов расчета статических неопределимых систем в механике деформируемого твердого тела (метода сил и метода деформаций для раскрытия статических неопределимых систем) и др. Подчеркивается роль задач в формировании традиционного инженерного мышления в технических вузах. В статье постановка задач осуществляется непосредственно по каждому разделу либо задаче.

1. Примеры появления идей

Пример 1. Новые идеи могут вызывать неприятие у научной общественности. Пьер-Луи Мопертьюи в 1747 г. сформулировал принцип наименьшего действия ($\int mvds = \min$), являющийся аналогом интегралу $\int vds = \min$, использованному Л. Эйлером в 1744 г. при решении задач о траекториях точек, движущихся под действием центральных сил [2]. Мопертьюи пострадал именно из-за этого принципа, был вынужден уйти с поста президента Берлинской Академии. Но, как отметил поэт Е. Евтушенко в стихотворении “Карьера”, “забыты те, кто проклинали, но помнят тех, кого кляли”.

Новые идеи не находили понимания даже у выдающихся ученых, которые в свое время обогатили науку плодотворными идеями. Можно вспомнить, например, судьбу неевклидовой геометрии. Выдающийся ученый XIX века М. Остроградский весьма скептически отнесся к творчеству Н. Лобачевского – одного из создателей неевклидовой геометрии.

Пример 2. Если управление оптимально, то производная от функции Гамильтона по управлению равна нулю? Появление принципа максимума Л.С. Понтрягина связано, прежде всего, с добавлением к известным уравнениям Гамильтона $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}$, $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, ($i = 1, \dots, n$) условия $\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0$, ($k = 1, \dots, r$), где $\psi_i(t), \dots, \psi_n(t)$ – вспомогательные переменные; H – функция Гамильтона; u_1, \dots, u_n – управления. Кажется удивительным, что к использованию условия $\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0$

исследователи не пришли значительно раньше.

Пример 3. Должно ли управление подавлением колебаний упругого осциллятора носить резонансный характер? Оптимальное подавление колебаний упругого осциллятора можно найти без использования известной в настоящее время теории моментов. Уравнение, описывающее вынужденные колебания, имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = A \sin pt + B \cos pt, \quad (1)$$

где k – частота собственных колебаний; A, B – пока неизвестные константы; p – частота вынуждающего воздействия. Заданы начальные условия: при $t = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$. Если управление резонансное ($p = k$), то из (1) при заданных условиях на правом конце ($y(2\pi/k) = 0$, $\dot{y}(2\pi/k) = 0$) следует система, из которой находятся константы $A = \frac{y_0 k^2}{\pi}$ и $B = -\frac{y_0 k}{\pi}$. При такой правой части

полностью подавляются колебания за конечное время. Это соответствует управлению, которое получено, в том числе, методом теории моментов [3].

Пример 4. Можно ли подавить колебания при быстром переносном перемещении упругого осциллятора к концу движения (при $p \neq k$)? Существуют ли в этом случае управления, которые обеспечивают полное подавление колебаний в конце движения в фиксированный момент времени?

Возникла задача поиска оптимального (в смысле быстродействия) закона переносного движения упругой системы из начального в конечное состояние абсолютного покоя [4-7]. С учетом уравнения относительного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -U(t) \text{ необходимо найти } U(t), \text{ при котором за время } t_1 \text{ в результате}$$

перемещения упругого осциллятора на расстояние b колебания в конечной точке отсутствуют.

Должны выполняться условия:

а) в относительном движении

$$\begin{aligned} x(0) = 0, x\left(\frac{t_1}{2}\right) = 0, x(t_1) = 0; \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(t_1) = 0, \ddot{x}(0) = 0, \\ \ddot{x}\left(\frac{t_1}{2}\right) = 0, \ddot{x}(t_1) = 0, \ddot{x}(0) = 0, \ddot{x}\left(\frac{t_1}{2}\right) = 0, \ddot{x}(t_1) = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

б) в переносном движении

$$\begin{aligned} W(0) = 0, W\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{b}{2}, W(t_1) = b; \dot{W}(0) = 0, \dot{W}(t_1) = 0, U(0) = \dot{W}(0) = 0, \\ U\left(\frac{t_1}{2}\right) = \dot{W}\left(\frac{t_1}{2}\right) = 0, U(t_1) = \dot{W}(t_1) = 0, \ddot{W}(0) = 0, \ddot{W}(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поиск решения в виде степенного ряда с использованием систем аналитических вычислений (REDUCE и Maple) с учетом условий (2) и (3) привел к точному аналитическому решению:

$$U(t) = \frac{2\pi b}{t_1^2} \sin^{2n-1}\left(\frac{kt}{n}\right),$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$; k – частота собственных колебаний системы. Обобщение результатов исследований позволило сформулировать утверждение (или даже теорему).

Теорема: *кососимметричному оптимальному управлению переносным движением упругого объекта соответствует такое минимальное время движения, за которое осуществимо перемещение объекта из начального в конечное состояние абсолютного покоя.*

Моментные соотношения в относительном движении имеют следующий вид:

$$\int_0^{T_*} u_e(t) \cos ktdt = 0, \quad \int_0^{T_*} u_e(t) \sin ktdt = 0.$$

Эти соотношения являются необходимыми условиями оптимальности управления, а достаточным условием является обеспечение покоя переносного движения в конечный момент времени.

Использование систем аналитических вычислений позволяет сочетать аналитический и численный эксперимент, автоматизировать трудоемкие аналитические преобразования, минимизировать вероятность случайных ошибок в преобразованиях, решать задачи, которые ранее требовали привлечения больших коллективов либо не поддавались решению в связи с аналитическими трудностями, получать общие результаты по сравнению с традиционными численными расчетами.

Пример 5. Интересен достаточно простой пример из механики деформируемого твердого тела, когда новая точка зрения не находила отклика у коллег. Во всех существовавших ранее литературных источниках (в том числе, в учебниках по сопротивлению материалов) в случае свободных концов стержня (вала) эпюры углов закручивания строились в предположении, что одно из крайних сечений считалось условно неподвижным.

Естественный вопрос: как на самом деле поворачивается произвольное сечение вала по отношению к исходному недеформируемому состоянию? Оказалось, что действительная эпюра углов поворота равна среднему арифметическому условных эпюр углов закручивания, построенных в предположении поочередных защемлений концов вала. Рассуждения, которые привели к такому заключению, приведены в [8].

Пример 6. Новый класс задач оптимального управления упругим деформированием возник из практики [9]. Важна сама идея постановки задачи. Задано (описано) напряженно-деформированное состояние упругого объекта, у которого медленно движется внешняя нагрузка, и необходимо найти такие сосредоточенные неподвижные управляющие воздействия, которые непрерывно обеспечивают экстремум (минимум) деформационного критерия оптимальности и удовлетворяют принятым ограничениям [9].

2. Идеи в учебном процессе

Одной из главных целей образования является развитие творческих способностей личности, безусловное усвоение фундаментальных принципов общеинженерных дисциплин, на которых основана деятельность инженера.

Инженерная деятельность связана с умением видеть задачи и находить их решения с привлечением принципов и теорем фундаментальных наук. Решение многих классических задач сводится к четкой последовательности действий, что воспитывает и формирует алгоритмическое мышление. По словам ученого-механика и педагога А.П. Минакова: «Главная цель профессора высшей школы состоит в развитии интеллекта (*intelligo* – понимаю) при помощи данного предмета (данной научной дисциплины)». Этот фундаментальный принцип всегда был основным для традиционно глубокого высшего технического образования.

Какие задачи учебного процесса наиболее актуальны в настоящее время?

В центре внимания должно быть противоречие – между исследователем и объектом исследования, обучающимся и содержанием курса. Сам процесс поиска

истины для исследователя есть столь сильное удовольствие, что другие вознаграждения не могут с ним сравниться!

Обратим внимание на поучительную историю возникновения двух альтернативных методов расчета статически неопределимых стержневых систем, которые, в конечном счете, привели к появлению современного эффективного метода расчета деформируемых объектов произвольной формы (метода конечных элементов).

2.1 Методы расчета статических неопределимых систем

В начале XIX века возникли актуальные инженерные задачи при строительстве мостов. Считалось, что балки очень жесткие, поэтому укрепилось мнение, что деформации малы и поэтому не влияют на реакции. Возникла и другая точка зрения, состоящая в том, что для появления даже малых деформаций необходимо прикладывать большие усилия.

Появление новых идей далее будет рассматриваться на примере зарождения методов расчета статических неопределимых систем в механике деформируемого твердого тела (с приложением к строительной механике стержневых систем). В методе сил отрицаются перемещения по направлению так называемых «лишних» неизвестных (например, реакций связей), тогда как в методе деформаций отрицаются усилия в искусственно добавленных связях.

Рассмотрим, например, расчет рамы, трижды статически неопределимой по методу сил и трижды кинематически неопределимой по методу деформаций. Рама изображена на рисунке 1а, а ее эквивалентные системы соответственно на рисунках 1б и 1в.

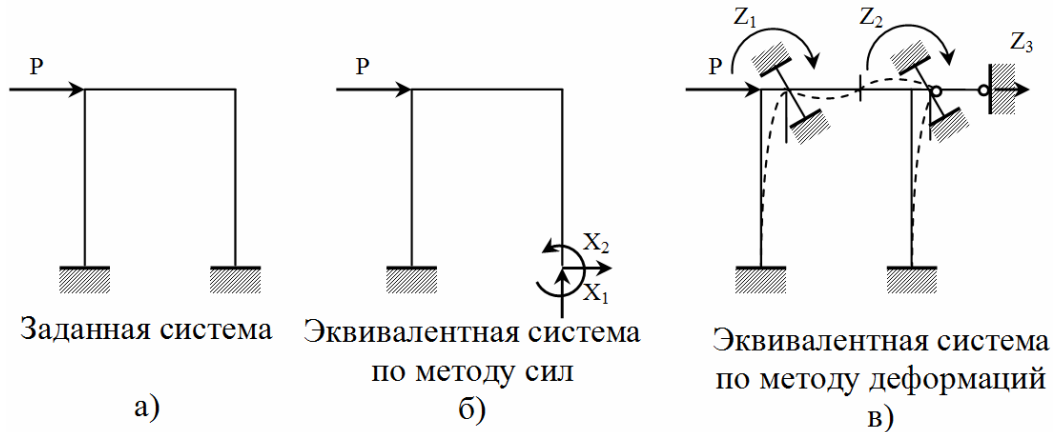


Рис. 1. Эквивалентные системы для рамы:
б) по методу сил; в) по методу деформаций

Канонические уравнения метода сил, отрицающие линейные и угловые перемещения в жесткой заделке, для данного примера имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3p} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где для удельных перемещений следует $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Например, δ_{12} – перемещение по направлению X_1 от силы $X_2 = 1$; Δ_{1p} – перемещение от заданной нагрузки по

направлению силы X_1 , и т.п. Коэффициенты и свободные члены в (4) вычисляются с использованием интеграла Мора [10].

Канонические уравнения метода перемещений (деформаций), отрицающие моменты и реакцию в дополнительных связях, имеют вид:

$$\begin{aligned} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + R_{2p} &= 0, \\ r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 + R_{3p} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $r_{ij} = r_{ji}$; например, r_{12} – реакция связи 1, вызванная единичным перемещением связи 2 (в данном случае углом поворота узла 2); z_1 – неизвестное угловое перемещение узла 1; R_{1p} – реакция связи 1 от внешней нагрузки. Коэффициенты и свободные члены в (5) вычисляются согласно методике, приведенной, например, в [11, 12]. Обращает на себя внимание единство математического образа при сравнении (4) и (5). Применение этих методов рассмотрим на примере рамы, которая изображена на рисунке 2а. При ее решении по методу сил (эквивалентная система изображена на рисунке 2б) канонические уравнения для дважды статически неопределимой системы после вычисления коэффициентов и свободных членов следующие:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa &= 0, \\ -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$



Рис. 2. Пример выбора эквивалентных систем по методу сил и по методу деформаций

Решая систему уравнений (6), получим: $X_1 = -\frac{3}{7}qa$; $X_2 = \frac{3}{28}qa$.

Интересно, что в данном примере по методу деформаций получается только одно алгебраическое уравнение

$$r_{11}z_1 + R_{1q} = 0, \text{ т.е. } z_1 = -\frac{R_{1q}}{r_{11}}.$$

После определения коэффициента при неизвестной и свободного члена из равенства узлов: $r_{11} = \frac{7EJ}{a}$, $R_{1q} = \frac{qa^2}{8}$ следует $z_1 = \frac{qa^3}{56EJ}$. Естественно, что эпюра внутренних усилий для обоих методов одинакова.

Если метод сил стал по существу естественным обобщением опыта исследований статически неопределимых систем, то метод деформаций явился *остроумным качественным скачком* в процессе познания, возможно, что это внезапное озарение исследователей XX века.

2.2. Алгоритмы проектировочного расчета на устойчивость сжатых стержней

Потеря устойчивости исходного равновесия упругого стержня при увеличении продольной силы является одним из частных случаев теории катастроф [13]. Обычно в инженерных расчетах на устойчивость упругих систем используется классическая теория [10]. В [14] разработан алгоритм проектировочного расчета на устойчивость сжатых стержней, который предполагает автоматический выбор (с использованием известной итерационной процедуры) соответствующего номера профиля из заданного в виде массива сортамента прокатной стали.

Классический проектировочный расчет на устойчивость сжатого стержня предполагает, как известно, подбор по сортаменту поперечного сечения стержня при: заданной длине стержня, продольной нагрузке, известном способе закрепления концов и заданном допустимом напряжении материала стержня. В связи с тем, что в расчетной формуле на устойчивость $\sigma = \frac{P}{\varphi F_{бр}} \leq [\sigma_-]$

имеются две неизвестные величины: коэффициент φ и искомая площадь брутто $F_{бр}$ поперечного сечения, то при подборе сечения используется метод последовательных приближений; варьируется величина коэффициента продольного изгиба φ . Обычно при подборе сечения требуется 2-3 попытки. Задача сводится к последовательности действий: **1.** Определяется расчетная длина стержня $l_{np} = \nu l$, где l – длина стержня, ν – коэффициент приведения длины. **2.** В первом приближении для коэффициента продольного изгиба принимается некоторое значение $\varphi = \varphi_1$ и определяется требуемая площадь $F = P/\varphi_1[\sigma_-]$, где P – центральная сжимающая нагрузка; $[\sigma_-]$ – основное допустимое напряжение. **3.** По сортаменту подбирается сечение с площадью, близкой к полученной по расчету (п. 1), и находится i_{min} . **4.** Вычисляется гибкость стержня $\lambda = l_{np}/i_{min}$. **5.** По таблице зависимости коэффициента продольного изгиба φ от гибкости стержня λ с помощью линейной интерполяции находится φ' . Из таблиц известно: $\lambda_1, \varphi_1; \lambda_2, \varphi_2; \lambda$ вычислена ранее. С помощью процедуры линейной интерполяции (рис. 3) находится φ' согласно формуле

$$\varphi' = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1).$$

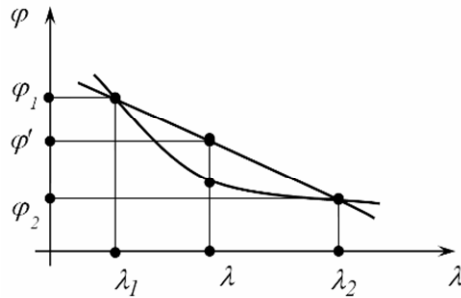


Рис. 3. График $\varphi = \varphi(\lambda)$, иллюстрирующий определение φ'

Если $\varphi' \neq \varphi_1$, то осуществляется переход ко второму приближению. При этом во втором приближении принимается $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'}{2}$ и затем опять осуществляется переход к п. 2. В конце итерационного процесса выполняется проверка напряжения $\sigma_i = \frac{P}{\varphi_i F_{\sigma p}}$, причем $\left| \frac{\sigma_i - [\sigma_-]}{[\sigma_-]} \right| \cdot 100 \% \leq 5 \%$. Данное условие является достаточным при окончательном выборе профиля по сортаменту, в практических расчетах им можно ограничиться.

Альтернативный алгоритм расчета, сводящийся к решению нелинейного уравнения, исключает традиционные процедуры линейной интерполяции (при поиске на основании таблиц значения коэффициента продольного изгиба) и итерации (при нахождении площади поперечного сечения стержня, обеспечивающей устойчивость). Данный алгоритм предложен А.И. Бохонским и состоит в следующем.

1. Построение аналитической зависимости коэффициента продольного изгиба φ от гибкости λ , т.е. нахождение функции $\varphi = \varphi(\lambda)$. Коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения в расчетах на устойчивость

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр} n}{\sigma_0 n_y}, \tag{7}$$

где $\sigma_{кр}$ – критическое напряжение, соответствующее наступлению потери устойчивости (переходу в новое положение равновесия); σ_0 – напряжение, при котором происходит потеря прочности ($\sigma_0 = \sigma_T$ – для пластических материалов; $\sigma_0 = \sigma_\sigma$ – для хрупких материалов); n – коэффициент запаса прочности; n_y – коэффициент запаса устойчивости.

В (7) критическое напряжение вычисляется так: при $\lambda \geq 100$, $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ – гипербола Эйлера, где E – модуль упругости материала; при $100 > \lambda \geq 40$, $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ – формула Ясинского, где a, b – константы; при $40 > \lambda \geq 0$, $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

В литературе обычно приводится таблица значений $\varphi = \varphi(\lambda)$ для различных материалов [10].

С использованием табличных данных построена аналитическая функция $\varphi = \varphi(\lambda)$ с привлечением стандартной процедуры *linfit* в MathCAD. Выбран аппроксимирующий полином

$$\varphi = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5, \quad (8)$$

где константы $a_0 \dots a_5$ найдены в результате реализации процедуры *linfit*. Например, для стали (Ст.2, Ст.3, Ст.4, таблица 22 [10]) полином (8) записывается так:

$$\varphi(\lambda) = 1,005 - 3,785 \cdot 10^{-3} \cdot \lambda + 1,209 \cdot 10^{-4} \lambda^2 - 2,482 \cdot 10^{-6} \lambda^3 + 1,564 \cdot 10^{-8} \lambda^4 - 3,15 \cdot 10^{-11} \lambda^5. \quad (9)$$

На рисунке 4 изображены графики, которые построены с использованием табличных данных и зависимости (9); они практически совпадают. При вычислении φ для дискретных значений λ по зависимости (9) погрешность не превышает 2-3%. Например, по таблице 22 [10] при $\lambda = 50$ следует $\varphi = 0,89$, а согласно зависимости (9) $\varphi = 0,896$.

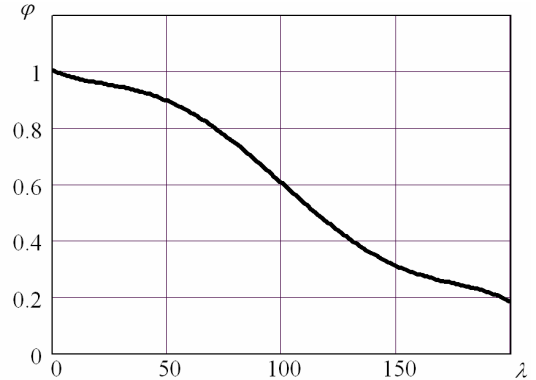


Рис. 4. Графики функций $\varphi(\lambda)$ по табличным данным и по зависимости (9)

2. Для зависимости минимального радиуса инерции поперечного сечения i_{min} от площади поперечного сечения стержня F использовался полином вида (8).

Построена зависимость минимального радиуса инерции для двутавра $i_{min} = i_y = i_y(F)$ от его площади поперечного сечения (на основании ГОСТ 8239-72).

Для радиуса инерции, как и ранее, после реализации процедуры *linfit* следует

$$i_y = -0,021 + 0,116F - 1,48 \cdot 10^{-3} F^2 + 4,254 \cdot 10^{-6} \cdot F^3 + 4,552 \cdot 10^{-8} F^4 - 2,39 \cdot 10^{-10} F^5. \quad (10)$$

Графики $i_y = i_y(F)$, построенные согласно ГОСТ 8239-72 и по (10), изображены на рисунке 5. Например, для $F = 138 \text{ см}^2$ по (10) $i_y = 3,53 \text{ см}$, а по таблице ГОСТ 8239-72 $i_y = 3,54 \text{ см}$, что свидетельствует о высокой точности аппроксимации.

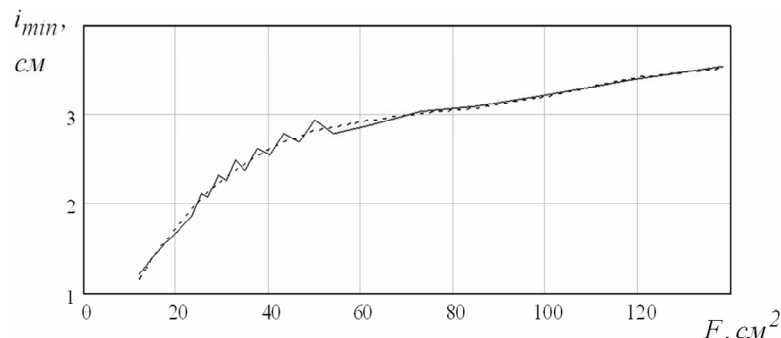


Рис. 5. Графики зависимости $i_y = i_y(F)$: по табличным данным и по зависимости (10)

3. Дальше задача поиска площади поперечного сечения F сжатого стержня сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения

$$U = \frac{P}{F \cdot [\sigma_-]} - \varphi = 0, \quad (11)$$

где P – продольная сила; $[\sigma_-]$ – допускаемое напряжение в расчетах на прочность.

$$\text{В (11)} \quad \varphi = \varphi(x), \quad \lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}$$

$i_{\min} = i_{\min}(F)$, где i_{\min} – радиус инерции; ν – коэффициент приведения длины; l – длина стержня.

После преобразований нелинейное уравнение (11) содержит только одно неизвестное – площадь сечения F . Для иллюстрации на рисунке 6 показано графическое решение уравнения (11) и видно, что корень совпадает с аналитическим решением.

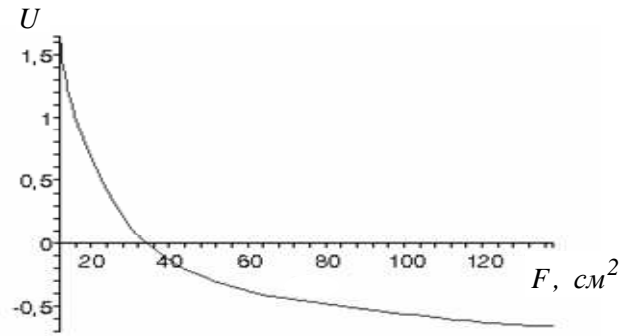


Рис. 6. Графическое решение уравнения (11)

Численный пример. Исходные данные: $P = 320$ кН; $\nu = 0,5$; $[\sigma_-] = 160$ МПа; $l = 5$ м. Уравнение (11) решено с использованием функции *solve* в Maple. Интересно, что при этих же исходных данных в [14] в результате трех приближений подобран двутавр №24 с площадью поперечного сечения $F = 34,8 \text{ см}^2$, что свидетельствует о совпадении результатов вычислений по обоим алгоритмам. Преимущество алгоритма – исключение традиционных итераций.

Если при подборе сечения не используется сортамент прокатной стали, то задача упрощается, т.к. нет необходимости построения функции $i_{\min} = i_{\min}(F)$.

Алгоритм расчета, основанный на методе перебора

Возможен также алгоритм, основанный на методе перебора, состоящий в следующем: при заданных исходных данных $(P, \nu, l, [\sigma_-], \epsilon)$ и заранее полученной функции $\varphi = \varphi(\lambda)$ вводятся массивы: номер профиля, площадь поперечного сечения и минимальный радиус инерции. В цикле для каждого номера вычисляются λ_k и φ_k , $\sigma_k = \frac{P}{\varphi_k F_k}$ и погрешность $\Delta\sigma_k = \left| \frac{\sigma_k - [\sigma_-]}{[\sigma_-]} \right| \cdot 100 \%$.

Если погрешность не превышает заданной ϵ , то расчет заканчивается.

3. Идеи в научных исследованиях

3.1 Резонансы в упругопластической системе

Основы общей теории колебаний и её приложения к решению технических задач изложены в [15]. Теории колебаний преимущественно линейных систем посвящено учебное пособие [16], в котором на достаточно простых примерах иллюстрируются возможности современной теории колебаний механических систем. Наиболее общие сведения о нелинейных механических колебаниях даны в [17], но системы гистерезисного типа в этой работе не рассмотрены.

Исследованию упругопластических систем с приложениями к сейсмостойкому строительству посвящены, например, работы [18-20], в которых не только выявлены новые динамические свойства таких систем, но и даны приложения к расчетам рам, испытывающих горизонтальные и вертикальные

составляющие интенсивного сейсмического воздействия в условиях развития пластических деформаций в местах максимальных внутренних усилий.

Здесь выполнен анализ колебаний упругопластической системы в резонансных режимах (при обычном и параметрическом резонансах). Для систем такого класса обычно используются численные методы интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с реализацией условий воспроизведения петли гистерезиса. При нелинейности гистерезисного типа, к сожалению, не удалось использовать стандартную программу численного интегрирования уравнения движения, поэтому на языке Maple написана программа, реализующая метод Рунге-Кутты IV-го порядка. Анализируется решение нелинейного дифференциального уравнения движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m} \cdot Q(x) = A \cdot \sin pt, \quad (12)$$

где m – масса объекта; $Q(x)$ – нелинейная восстанавливающая сила. В каждом j -м шаге численного интегрирования уравнения вычислялась сила $Q_j = Q_{j-1} + c \cdot (x_j - x_{j-1})$, где Q_{j-1} – восстанавливающая сила на $j-1$ -м этапе; c – коэффициент жесткости на упругом участке диаграммы деформирования; x_j , x_{j-1} – перемещения объекта на соответствующих шагах интегрирования. Проверяются условия: если $Q \leq -Q_T$, то $Q := -Q_T$; если $Q \geq +Q_T$, то $Q := +Q_T$, где Q_T – пластическое сопротивление.

Дальше в уравнении движения принято: A , p – амплитудное значение и частота гармонического воздействия. Обычный резонанс в этой системе на упругом участке наступает при $k = p$, где $k = \sqrt{c/m}$. Численное интегрирование уравнения (12) осуществлялось при нулевых начальных условиях для следующих исходных данных: $m = 4000$ кг; $c = 8 \cdot 10^5$ Н/м; $Q_T = 8000$ Н; $A = 9$ м/с².

На рисунке 7 изображена схема переносного движения (вдоль осей X и Y) перевернутого маятника с образованием упругопластического шарнира в точке O_1 . Дифференциальное уравнение относительного движения (уравнение вращения)

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M(\varphi) + m \cdot (g + \ddot{y}_e) \cdot L \cdot \sin \varphi - m \cdot \ddot{x}_e \cdot L \cdot \cos \varphi. \quad (13)$$

Здесь $J = m \cdot L^2$ – момент инерции сосредоточенной массы (стержень невесомый); m – сосредоточенная масса; φ – угол поворота; $M(\varphi)$ – упругопластический момент в точке O_1 ; L – длина стержня; \ddot{y}_e – вертикальное ускорение сосредоточенной массы в связи с переносным движением; \ddot{x}_e – горизонтальное ускорение переносного движения.

Если относительные перемещения малы, т.е. $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\cos \varphi \approx 1$, то уравнение (13) запишется так $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{m \cdot L^2} \cdot M(\varphi) + \frac{(g + \ddot{y}_e)}{L} \cdot \varphi - \frac{\ddot{x}_e}{L}$. При замене

$\varphi \approx x/L$ данное уравнение преобразуется к виду $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m} \cdot Q(x) - \frac{g + \ddot{y}_e}{L} \cdot x = -\ddot{x}_e$, где $Q(x)$ – сила, которая отражает упругопластическое деформирование.

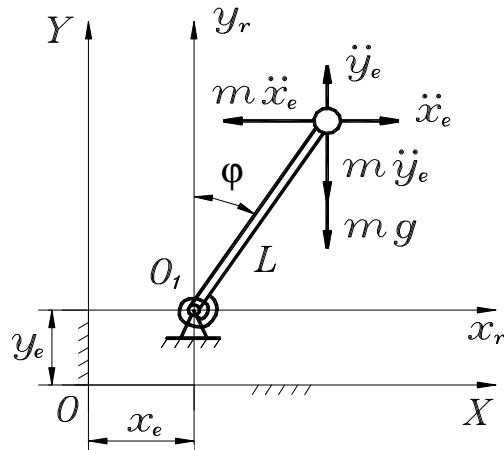


Рис. 7. Схема движения системы с одной степенью свободы с упругопластическим шарниром в точке O_1

Из рисунка 8 следует, что с течением времени в упругопластической системе наблюдаются устойчивые колебания около нового положения равновесия, причем перемещение и скорость в несколько раз меньше, чем в линейной системе.

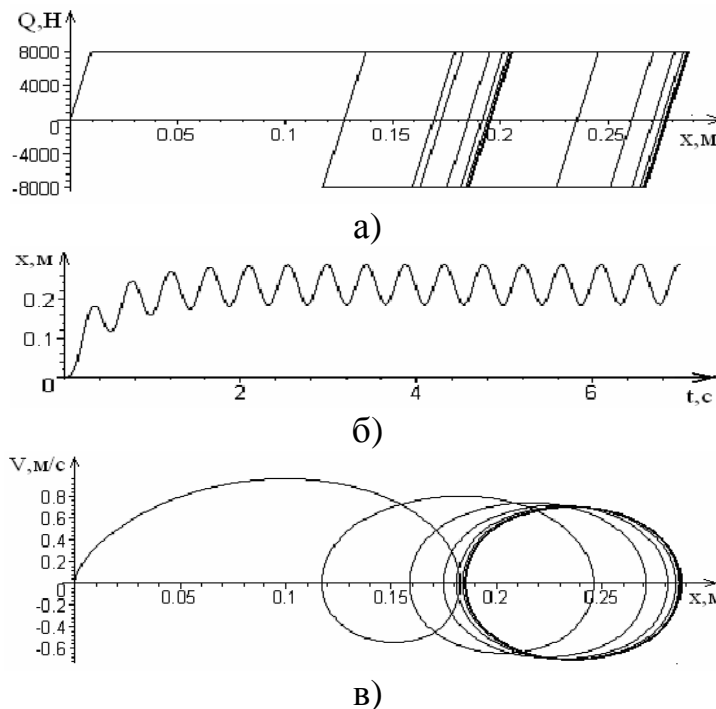


Рис. 8. Резонанс в упругопластической системе без учета линейно-вязкого сопротивления: а) график $Q=Q(x)$; б) график $x=x(t)$; в) график $V=V(x)$

Параметрическое резонансное возбуждение колебаний в линейной и упругопластической системах может приводить к снижению уровня колебаний, возникающих при обычном резонансе. На возможность такого гашения колебаний обращено внимание, например, в [20].

При обычном резонансе в линейной системе происходит более интенсивная раскачка по сравнению с параметрическим резонансом в этой системе. На заданном конечном временном интервале движения линейной системы ускорение при обычном резонансе на порядок и более может превосходить максимальное ускорение, возникающее на этом же промежутке времени при параметрическом резонансе.

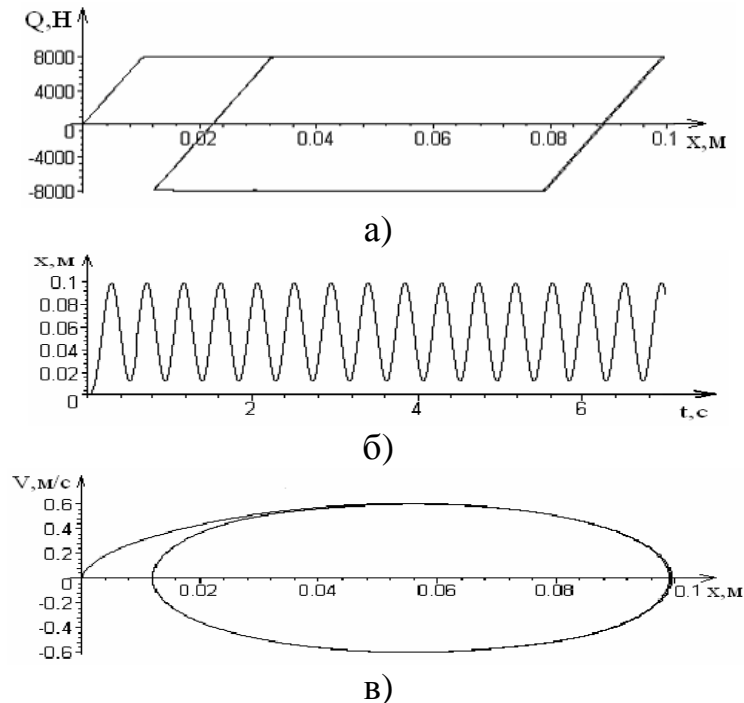


Рис. 9. Резонанс в упругопластической системе с учетом линейно-вязкого сопротивления: а) график $Q=Q(x)$; б) график $x=x(t)$; в) график $V=V(x)$

Упругопластическая система при резонансе (на упругом участке деформирования) асимптотически устойчива, установившиеся колебания происходят около некоторого нового положения равновесия, а ускорения в несколько раз меньше. Без учета вязкого сопротивления в линейной системе за конечное время достигается ускорение, которое во много раз превосходит максимальное ускорение установившегося движения упругопластической системы. При учете линейно-вязкого сопротивления в упругопластической системе в резонансном режиме уже за один цикл колебаний достигается устойчивое движение около нового положения равновесия.

3.2. Бифуркации: потеря устойчивости, аттракторы, хаос динамических систем

На примере показаны некоторые особенности потери устойчивости движения системы.

Теории устойчивости движения материальных систем посвящены фундаментальные труды А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, А.А. Андропова, А.Г. Четаева. Обобщение и развитие теории устойчивости движения нашло отражение в математической теории катастроф, которая изучает как скачкообразную потерю устойчивости (жесткая или катастрофическая потеря), так и мягкую потерю устойчивости (плавный переход системы из состояния равновесия в колебательный режим) [13].

Выпучивание и появление новых равновесных состояний упругих систем (бифуркации), потеря устойчивости ламинарного течения жидкости с увеличением числа Рейнольдса (явление турбулентности), внезапное появление изгибно-крутильных колебаний крыла самолета при медленном увеличении горизонтальной скорости (*flutter* – бить крыльями), броуновское движение частиц (хаос) – вот некоторые примеры потери устойчивости движения механических систем.

Само появление теории катастроф (1970-1985 гг.) явилось предвестником реальных событий, которые она могла описать (например, распад большого государства), и, возможно, теория катастроф могла помочь в прогнозе и адекватной оценке событий. Модели катастроф распространяются не только на технические [1, 17, 21-23], но на экономические [24] и другие системы.

Рассмотрим общие закономерности процесса потери динамической устойчивости линейных и нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрен пример бифуркации динамической системы: появление аттрактора Лоренца (странного аттрактора) в нелинейной системе.

Появление хаоса в динамической системе, описываемой системой обыкновенных слабо нелинейных дифференциальных уравнений, в результате малого изменения параметров можно отчетливо наблюдать на примере аттрактора Лоренца [23]. Система уравнений имеет вид:

$$\frac{dx_0}{dt} = -\sigma x_0 + \sigma x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = rx_0 - x_1 - x_0x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_0x_1 - bx_2,$$

где σ, r, b – константы. Возможен устойчивый предельный цикл, фазовый портрет которого изображен на рисунках 10, 11.

Достаточно изменить только один параметр, как появляется странный аттрактор, т.е. детерминированная система превращается в стохастическую (иными словами, появляется генератор случайного процесса, рисунки 12, 13).

При моделировании сложных динамических систем различной природы принципиальное значение имеет выявление наиболее важных параметров, малые изменения которых приведут со временем к потере динамической устойчивости.

Системы при неблагоприятных стечениях обстоятельств могут терять устойчивость, переходить тем или иным путем в качественно новые состояния. Поэтому актуален анализ поведения во времени таких неблагоприятных систем для прогноза их состояния и управления процессом.

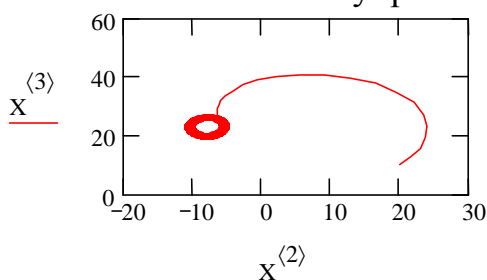


Рис. 10. График зависимости $x_3 = f_1(x_2)$ при устойчивом движении

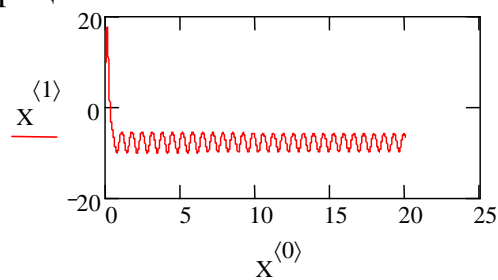


Рис. 11. График зависимости $x_1 = f_2(t)$ при устойчивом движении

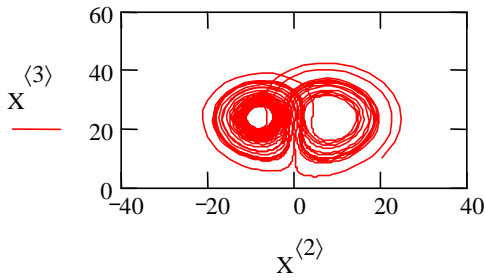


Рис. 12. График зависимости $x_3 = f_3(x_2)$ при появлении странного аттрактора

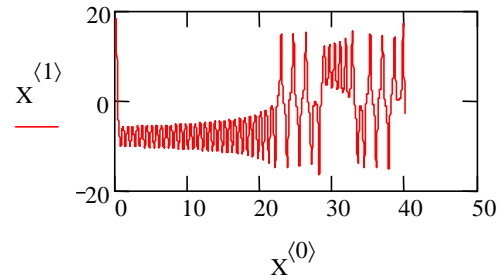


Рис. 13. График зависимости $x_1 = f_4(t)$ при появлении странного аттрактора

3.3. Сухое трение как оптимальное управление движением

С точки зрения теории оптимального управления в системе с сухим трением нелинейная характеристика трения как функция времени аналогична релейной (кусочно-непрерывной). В данном случае эта функция найдена как неизвестное оптимальное управление, когда в качестве критерия оптимальности принимается принцип быстрогодействия или даже принцип действия. Впервые на это обстоятельство было обращено внимание в [25, 26].

Исследованы свободные колебания системы с сухим трением с учетом упругой восстанавливающей силы. Переход из начального состояния, определяемого начальными условиями, в конечное (состояние покоя) осуществляется единственным образом. В качестве примера рассмотрена система (рисунок 14), движение которой описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -1 \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = -u,$$

где принято $|u| = 1$. Начальные условия: при $t = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = D$. Управление $u(t)$ найдено с использованием принципа максимума Л.С.Понтрягина [27]. Управление $u(t)$ переводит систему из отклоненного состояния в начало координат (в общем случае – в зону застоя).

Для уравнений $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - u(t)$, полученных в результате замены

переменных, и критерия $\int_0^{t_1} dt = \min$ функция Гамильтона принимает вид

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 - \psi_2 u(t). \quad (14)$$

Из (14) следует, что H достигает максимального значения только при $u(t) = 1 \cdot \text{sign} \psi_2(t)$. Функция $\psi_2(t)$ находится из решения системы канонически

сопряженных уравнений $\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2$, $\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1$, откуда следует функция

$\psi_2 = C \sin(t - \pi)$, где C – константа; можно принять $C = 1$. Следовательно, управление как функция времени записывается так:

$$u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin t - \pi).$$

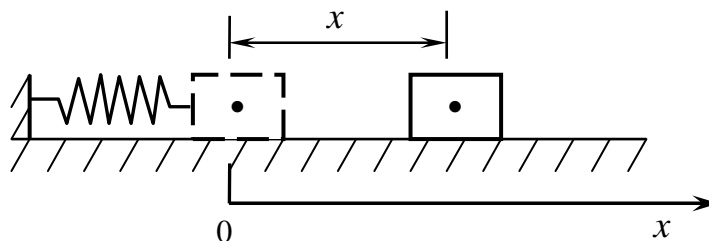


Рис. 14. Схема движения системы с одной степенью свободы

При четном значении D осуществляется переход в начало координат, а при нечетном или дробном – в зону застоя. Поскольку не при всяком значении D система возвращается в начало координат, то можно утверждать, что не при всех D система вполне управляемая.

Отметим, что функции $\dot{x}(t)$ и $\psi_2(t)$ совпадают по знаку, т.е. управление, как и следовало предположить, зависит от знака скорости.

Таким образом, функция управления $u(t) = k \cdot \text{sign}(\dot{x})$ получена без непосредственного решения уравнения свободных колебаний системы с сухим трением. По виду характеристики сухого трения как функции времени, полученной путем синтеза оптимального управления, можно судить о динамической устойчивости системы.

4. О выборе тем и задач для научно-исследовательских работ студентов

Молодые годы – творческая пора! Жизнь и труд великих ученых – достойный пример для подражания. Для многих ученых исследования были настоящим подвигом. Их биографии свидетельствует о том, что чаще всего открытия появлялись в молодости с последующей доработкой идей. С изобретения метода наименьших квадратов начал обучение в Геттингенском университете восемнадцатилетний К. Гаусс. Эварист Галуа накануне дуэли (в 21 год) сообщил своему другу основные идеи теории групп – ключе к современной алгебре и геометрии. Г. Герц завершает учебу в университете диссертацией «Об индукции во вращающихся телах». Джоуль в 20 лет изобрел электрический двигатель...

В истории науки известно много весьма поучительных примеров, когда в студенческие годы выполнялись серьезные научные исследования, поэтому безусловно необходимо участвовать в исследованиях уже с первого курса. Именно в романтике научного поиска заключена облагораживающая сила. К. Паустовский писал: «...романтическая настроенность не позволяет человеку быть лживым, трусливым и жестоким».

С.П. Капица писал: “Так же как сказки являются первым образом реального мира, так и задачи дают студенту первое представление о мире физическом”. Конечно, чрезвычайно трудно предложить начинающим исследователям проблему такой сложности как, например, И. Бернулли, который сформулировал в 1697 г. задачу о брахистохроне, приведшую в последствии к вариационному исчислению – такие случаи в науке весьма редки, но возможны. На первый взгляд задачи могут казаться достаточно простыми [28], но их решение, однако, может потребовать большого напряжения.

Примеры тем для исследования

Тема 1. Покажите, что при колебаниях материальной точки (они вызваны не нулевыми начальными условиями), на которую действует сила упругости пружины и сила сухого трения, саму силу сухого трения (функцию времени) можно рассматривать как оптимальное релейное управление. Найдите это управление с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Тема 2. Задан стержень длины L с распределенной по длине массой m и сосредоточенной массой M на правом конце. Стержень вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной продольной оси стержня и проходящей через левый конец стержня. Учитывая только изгиб, составить дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (с учетом центробежных сил). Жесткость стержня на изгиб EJ .

Тема 3. На идеально гладкой горизонтальной плоскости произвольно свободно расположена замкнутая нерастяжимая нить массы m , заключенная по всей длине в желобок без трения. Масса нити распределена по ее длине. Каждой точке нити была сообщена скорость V . Что произойдет с нитью, если мгновенно убрать желобок? При обосновании результата эффектами, связанными с вращением Земли, пренебречь.

Тема 4. К.Э. Циолковский писал: «Сначала идут: мысль, фантазия, сказка, за ними шествует научный расчет». Леонард Эйлер (300 лет со дня рождения которого исполнилось 15 апреля 2007 года) писал: «... в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-либо максимума или минимума...». Можно ли непосредственно воспользоваться высказыванием Л. Эйлера?

Тема 5. С развитием вычислительной техники, математических пакетов и компьютерных технологий решение многих актуальных и одновременно трудоемких задач стало возможным благодаря системам аналитических вычислений (САВ). Существует аналогия между экстремумом функции и экстремумом функционала. Если необходимое условие экстремума функции – равенство нулю дифференциала ($df = 0$), то необходимое условие экстремума функционала – равенство нулю его вариации ($\delta J = 0$). Под вариацией функции можно подразумевать разность между двумя близкими функциями, взятыми, например, в классе полиномов; функции близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль их разности мал.

Обычно для функции можно построить график при широком диапазоне изменения аргумента и установить таким образом многие экстремумы, но и до настоящего времени графическая интерпретация поведения функционала, как правило, не проводилась, прежде всего в связи с трудоемкостью процедуры.

Необходимо с использованием САВ найти экстремум функционала

$$J = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2) dt \quad \text{при граничных условиях } x_1(0) = x_2(0) = 0; \quad x_1(\pi/2) = 1, \\ x_2(\pi/2) = -1 \quad \text{для функций } x_1(t) \text{ и } x_2(t), \text{ доставляющих ему минимум.}$$

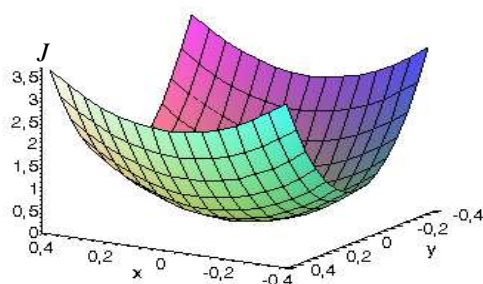


Рис. 15. Пример поверхности функционала (эллиптического параболоида)

Построение графиков зависимости функционала от параметров, характеризующих вариации функций, позволяет дать окончательный ответ на вопрос о существовании и типах экстремума функционала. При использовании САВ облегчаются задачи многократного вычисления как самого функционала, так и параметров, характеризующих вариации функции [29].

Заключение

Инженерная деятельность в огромной степени связана с умением видеть задачи, упорно искать и находить их решение с привлечением принципов и теорем теоретической и прикладной механики, многих других наук. Интересные задачи не редко сочиняются и решаются на основании правдоподобных рассуждений, опыта и энтузиазма авторов. Предложить интересную и преимущественно посильную задачу – вот способ привлечения способного студента работать на пределе своих возможностей!

Список литературы

1. Рабинович И.М. Интуиция в строительной механике // Исследования по теории сооружений: Вып. XVIII. – 1970. – С. 201-209.
2. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 288 с.
3. Карновский А.И., Почтман Ю.М. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем. – К.: Вища шк., 1982. – 116 с.
4. Бохонский А.И. Управляемое упругое деформирование твердых тел // Вестник СевГТУ. Сер. Моделирование и эксперимент в инженерных задачах. – 1995. – Вып. 1. – С.47-54.
5. Бохонский А.И. Оптимальное переносное движение упругих систем // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология. – 2002. – Вып. 38. – С. 33-38.
6. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Оптимальное движение объектов малой жесткости в состоянии невесомости // Оптимизация производственных процессов. – 2003. – Вып. 6. – С. 42-47.
7. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Оптимальное переносное движение упругих объектов // Динамические системы: Межвед. научн. сб. – 2005. – Вып. 19. – С. 3-10.
8. Бохонский А.И. Построение эпюр действительных углов закручивания сечений стержней при кручении: Методические указания. – Севастополь: КМУ СПИ, 1989. – 11 с.
9. Бохонский А.И., Вохмянин А.Н. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. – 240 с.
10. Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Усманский Э.С. Сопротивление материалов. – К.: Вища шк., 1986. – 676 с.
11. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
12. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 520 с.

13. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
14. Бохонский А.И. Совершенствование процедуры проектировочного расчета на устойчивость сжатых стержней // Сборник научных трудов СВМИ. –2007.–Вып. 2(12).–С.3–5.
15. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
16. Василенко Н.В. Теория колебаний: Учеб. пособие. – К.: Вища шк., 1992. – 430 с.
17. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 2. Колебания механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. – М: Машиностроение, 1979. – 351 с.
18. Бохонский А.И. Деформации упругопластической системы при сейсмическом воздействии // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1975. – Вып. XXV. – С. 77-81.
19. Бохонский А.И. Деформации упругопластической системы при учете горизонтальной и вертикальной составляющих сейсмического воздействия // Сейсмическое строительство. Отечественный и зарубежный опыт. 1974. – Вып. 5. – С. 46-49.
20. Бохонский А.И., Исаев А.В. Модели упругопластического деформирования стержней // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология. – 2007. – Вып. 80. – С. 15-19.
21. Ланда П.С. Автоколебания системы с конечным числом степеней свободы. – М.: Наука, 1980. – 360 с.
22. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
23. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 832 с.
24. Бохонский А.И. От гуманитарной идеи до математической модели в экономике // Актуальные проблемы гуманитарного образования в современных условиях // Сборник научных трудов ВГМИ. – 2004. – Вып. 2. – С. 46-51.
25. Бохонский А.И. Оптимальное проектирование жесткопластических рам при сейсмической нагрузке // Сопротивление материалов и теория сооружения. – 1977. – Вып. XXVII. – С. 64-69.
26. Бохонский А.И. Оптимальное управление в некоторых задачах механики // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1982. – Вып. 41. – С.129-133.
27. Теория автоматического управления / Под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высш. шк., 1972. – 432 с.
28. Бохонский А.И., Первухина Е.Л. Методические рекомендации по выбору тем НИРС по теоретической механике и механике деформируемого твердого тела. – Севастополь: КМУ СПИ, 1990. – 27 с.
29. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевская Т.В. Механика управляемого движения объектов. – М.: Инфра-М, 2021. – 170 с.

Сведения об авторах:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»;

Варминская Наталья Ивановна – к.т.н., заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин.