УДК 629.12 https://doi.org/10.26160/2309-8864-2020-9-48-53

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕПЛООБМЕННЫМИ АППАРАТАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Конева С.А., Цалоев В.М.
Севастопольский государственный университет, г. Севастополь

Ключевые слова: теплообменный аппарат, распределенные параметры, теплоноситель, преобразование Лапласа.
Аннотация. Рассматривается методика построения и исследования динамических характеристик математических моделей тепловых объектов, описываемых дифференциальными уравнениями с распределенными параметрами, полученных на основе уравнения теплового баланса.

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS OF SYSTEMS CONTROL OF HEAT EXCHANGERS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Koneva S.A., Tsaloev V.M.
Sevastopol State University, Sevastopol

Keywords: heat-exchange apparatus, distributed parameters, heat carrier, Laplace transformation.
Abstract. Method of constructing and studying dynamic characteristics of mathematical models of thermal objects described by differential equations with distributed parameters, obtained on the basis of thermal balance equation, is considered.

При проектировании и исследовании теплообменных аппаратов и процессов важное значение приобретает не изолированное рассмотрение аппарата как элемента системы, а его взаимодействие с системой в целом с учетом внутрипараметрических физических связей, а также краевых и начальных условий, соответствующих работе аппарата в реальных ситуациях.

Динамика тепловых процессов в теплообменных аппаратах как объектах регулирования выражается изменением температурных полей, определить которые можно на основе общего закона сохранения энергии, законов теплопередачи: конвекции, излучения, теплопроводности и релаксации. Пренебрежение одним из факторов при описании процессов динамики тепловых объектов исключает возможность учета важнейших их свойств, определяемых распределенностью параметров, и поэтому получаемые на основе указанных допущений математические модели тепловых объектов не полностью отражает реальную физическую картину явления.

Рассматривается система автоматического регулирования температуры топлива судовой пароэнергетической установки. Подогрев топлива производится с целью более полного его сгорания, а также для получения необходимого уровня вязкости, обеспечивающей хорошее распыление форсунками, и осуществляется греющим паром в цилиндре подогрева. Внутри цилиндра находится змеевик, по которому проходит греющий пар (рис. 1).

Рис. 1. Схема теплообменного аппарата

Последовательно с цилиндром (на выходе) соединен измеритель вязкости, который является корректирующим органом для подогрева (рис. 2).

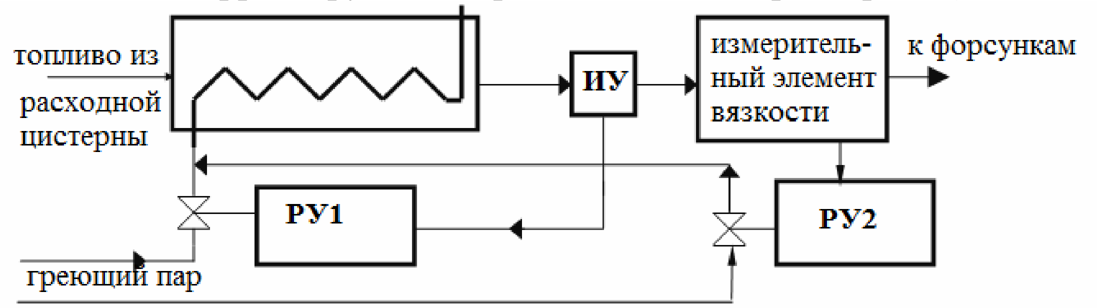

Рис. 2. Функциональная схема системы подогрева топлива

На рисунке 2 введены следующие обозначения: ИУ-термоманометрический измерительный элемент; РУ1- двухимпульсный регулятор (температуры топлива и расхода пара) непрерывного действия; РУ2-регулятор с жесткой обратной связью.

Процесс теплообмена в обогревателе описан дифференциальными уравнениями с сосредоточенными параметрами [1]. Такие уравнения не учитывают ряд факторов: теплопроводность, конвекцию, релаксацию.

Ставится задача учесть вышеперечисленные факторы в совокупности и роль каждого из них в отдельности.

Решение этой задачи требует рассмотрения уравнений и систем с распределенными параметрами. Учет распределенности параметров приводит к более узкой области устойчивости системы, чем аналогичный случай, описанный уравнениями с сосредоточенными параметрами. Это может привести к ситуации, когда параметры регулятора системы автоматического регулирования, выбранные исходя из описания ее динамики уравнениями с СП, могут не обеспечить устойчивости системы.

Будем рассматривать змеевик цилиндра подогрева топлива как однородный цилиндрический тепловыделяющий элемент (ТВЭ). Это позволит рассматривать ТВЭ как реактор, теплоносителем которого является само топливо.

Теплопередача устройства подогрева осуществляется за счет теплопроводности по радиусу ТВЭ, релаксации, конвекции и теплообмена с окружающей средой через стенку цилиндра.

Основой для получения уравнения или системы уравнений, описывающих процесс теплообмена в теплообменнике, служит уравнение теплового баланса

$$dQ = (Q_P + Q_K + Q_T + Q_U)dt,$$

где $dQ = cm \cdot du(x,t)$ – полный дифференциал изменения тепловой энергии; $Q_P = \dfrac{\ell sk}{w^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – релаксация; $Q_K = \alpha_c s_c (u - u_c) - \alpha_0 s_0 (u_c - u_0)$ – поток тепла за счет конвекции; $Q_T = k_T s_T \ell_T \dfrac{\partial^2 u_T(x,r,t)}{\partial x^2}$ – теплопроводность; $Q_U = \chi q(t)$ - поток тепла, выделяемый ТВЭ; k_T- коэффициент теплопроводности ТВЭ; r, x-радиальная и продольная координаты ТВЭ; l, s - длина и площадь поперечного сечения цилиндра, занимаемого топливом; s_T- площадь поверхности теплообмена ТВЭ; u_T (x,r,t) - температура ТВЭ; u_c- температура стенки; u_0- температура окружающей среды; α_c, α_0 – коэффициенты теплоотдачи стенки с окружающей средой; s_c, s_0 - площади поверхности теплообмена; w- скорость потока. С учетом выражения для полной производной одномерного поля температур

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{w}\frac{\partial u}{\partial x}, \; \left(\mathrm{w} = \frac{dx}{dt}\right)$$

и выражений для составляющих $Q_p, Q_\hbar, k_T, k_u$ получаем уравнение

$$cG\ell\frac{\partial u}{\partial x} + cm\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ell ks}{\mathrm{w}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_c s_c(u - u_c) - \alpha_0 s_0(u_c - u_0) +$$

$$+ l_T s_T k_T \frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} + \chi q(t).$$

Уравнение сопровождается начальными

$$u(x,0) = \varphi(x), \; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

и граничными условиями, которые зависят от формы теплообменника при $x = 0, x - l$

$$u(0,t) = \Phi(t), \; \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(u - u_0)\right).$$

Аналогичные условия могут быть заданы на другом конце теплообменника (u_c - считается известной).

Приведенное дифференциальное уравнение может быть записано в форме системы уравнений, каждое из которых учитывает пары составляющих теплового баланса.

Рассматривается двумерное описание процесса теплообмена, что наиболее точно представляет динамику процесса не только как теплообменного аппарата, но как и объекта регулирования.

Делается допущение, что поток тепла в ТВЭ за счет теплопроводности в продольном направлении x пренебрежимо мал по сравнению с радиальным потоком. Математическая модель процесса записывается как [2]

$$\begin{cases} c_T\gamma_T\dfrac{\partial u_T}{\partial t} = k_T\left(\dfrac{\partial^2 u_T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_T}{\partial r}\right) + q(t), \\ \dfrac{ksl}{\mathrm{w}^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cm\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{w}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \alpha s(u(x,R,t) - u) - \alpha_c s_c(u - u_c), \\ c_c m_c\dfrac{\partial u_c}{\partial t} = \alpha_c s_c(u - u_c) - \alpha_0 s_0(u_c - u_0), \end{cases} \quad (1)$$

где c, γ, m - удельная теплоемкость, удельный вес, масса; $q(t)$- мощность теплового источника.

Начальные условия системы нулевые:

$$u_T(x,r,0)=0;\ \ u_c(x,0)=0;\ u(x,0)=0;\ u'_t(x,0)=0.$$

Граничные условия: на входе температура топлива меняется по известному закону $u(0,t)=u_1(t)$.

На поверхности ТВЭ происходит теплообмен с топливом

$$k_T\left.\frac{\partial u_T}{\partial r}\right|_{r=R}=-\alpha\left(u_T(x,R,t)-u(x,t)\right);\qquad \left.\frac{\partial u_T}{\partial r}\right|_{r=0}=0.$$

Далее вместо *r* и *x* вводятся безразмерные величины *r/R, x/l* , которые меняются от 0 до 1. Для них сохраняются принятые обозначения *r, x.*

Для уравнений системы (1) выполним преобразования Лапласа по переменной *t* и, исключив из этих уравнений $u_c(x,p)$, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_T}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_T}{\partial r}+a_1q(p)=apu_T,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(b_0p^2+b_1p+b_2+b_3-\dfrac{b_4}{dp+1}\right)u=b_2u_T(x,R,p)-b_5G,\end{cases}\tag{2}$$

где G - весовой расход топлива; $a=\dfrac{c_T\gamma_T R^2}{k}$; $a_1+\dfrac{q_0R^2}{ku_0}$; q_0,u_0- базовые значения;

$$b_1=\frac{m}{G};\ b_0=\frac{ksl}{\mathrm{w}^2cG};\ b_2=\frac{\alpha s}{cG};\ b_3=\frac{\alpha_c s_c}{cG};\ b_5=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0;$$

$$b_4=\frac{\alpha_c^2 s_c^2}{cG(\alpha_c s_c+\alpha_0 s_0)(dp+1)};\ \ d=\frac{c_c m_c}{\alpha_c s_c+\alpha_0 s_0}.$$

При $b_0=0$ предполагается, что в цилиндре идет теплообмен без учета релаксации. Решение первого уравнения системы (2) имеет вид [3]:

$$u_T(x,r,p)=C_1(x)J_0(\sqrt{ap}\cdot r)+C_0.\tag{3}$$

При этом учтено, что $Y_0(\sqrt{ap}\cdot r)$ неограниченна при *r=0.*

Используя второе граничное условие, первое уравнение системы (2) и выражение (3), получаем: $C_0=a_1q(p)/€\,\mathrm{p}$.

Для частного случая $q(t)=q\eta(t)$ ($\eta(t)-$единичная функция) $q(p)=q/\mathrm{p}$. Тогда

$$u_T(x,r,p)=C_1(x)J_0(\sqrt{ap}\cdot r)+\frac{a_1}{ap^2}q.$$

При *r*=1

$$u_T(x,1,p)=u_T(x,R,p)=C_1(x)J_0(\sqrt{ap}\cdot)+\frac{a_1}{ap^2}q.\tag{4}$$

Находим производные

$$\frac{\partial\ u_T}{\partial\ x} = J_0(\sqrt{ap})\frac{d\text{„}_1}{dx};\ \left.\frac{\partial\, u_T}{\partial\ r}\right|_{r=1} = -\text{„}_1(x)\sqrt{ap}J_1(ap).$$

Используя первое граничное условие и найденные производные, после подстановки во второе уравнение системы (2), получаем уравнение для определения C_1*(x)*

$$\frac{dC_1}{d\ x} + \left(b_0 p^2 + b_1 p + b_3 - \frac{b_4}{dp+1} + \frac{b_2 k}{\alpha\,\ell}\frac{\sqrt{ap}\cdot J_1(\sqrt{ap})}{J_0(\sqrt{ap})}\right)C_1 = -\frac{b_1 a_1}{apJ_0(\sqrt{ap})} - \frac{b_5 G}{J_0(\sqrt{ap})}.$$

Его решение имеет вид

$$C_1(x) = -\frac{B(p)}{M(p)} + C(p)e^{-A(p)x};\ B(p) = \frac{b_1 a_1 q}{apJ_0(\sqrt{ap})};$$

$$A(p) = b_0 p^2 + b_1 p + b_3 - \frac{b_4}{dp+1} + \frac{b_2 k}{\alpha\,\ell}\frac{\sqrt{ap}\cdot J_1(\sqrt{ap})}{J_0(\sqrt{ap})}.$$

Из (4) с учетом условия $u(0,\,p) = u_1(p)$ находим

$$C(p) = \frac{u_1(p)}{J_0(\sqrt{ap})} + \frac{B(p)}{A(p)} - \frac{a_1}{ap^2 J_0(\sqrt{ap})}q.$$

С учетом последнего выражения решение для температуры топлива имеет вид:

$$u(x,\,p) = \frac{a_1}{ap^2}\left[1 - \frac{b_1 p}{A(p)}\right]\left(1 - e^{-A(p)x}\right)q + e^{-A(p)x}u_1(p). \qquad (5)$$

Для температуры ТВЭ имеем

$$u_T(x,r,\,p) = \frac{J_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{J_0(\sqrt{ap})}e^{-A(p)x}u_1(p) + \frac{a_1}{ap^2}\left\{\left[1 - \frac{J_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{J_0(\sqrt{ap})}e^{-A(p)x}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{b_1}{A(p)}\frac{J_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{J_0(\sqrt{ap})}e^{-A(p)x}\left[1 - e^{-A(p)x}\right]\right\}q.$$

Полагая в последних двух выражениях x=1, получим передаточные функции, соответствующие значениям параметров на выходе из обогревателя:

$$W_1(1,\,p) = \frac{u(1,\,p)}{u(0,\,p)} = \frac{u(1,\,p)}{u_1(p)} = e^{-A(p)};$$

$$W_2(1,\,p) = \frac{u(1,\,p)}{q} = \frac{a_1}{ap^2}\left[1 - \frac{b_1 p}{A(p)}\right]\left(1 - e^{-A(p)}\right);$$

$$W_3(1,r,\,p) = \frac{u_T(1,r,\,p)}{u_1(p)} = \frac{J_0(\sqrt{ap}.r)}{J_0(\sqrt{ap})}e^{-A(p)};$$

$$W_4(1,r,\,p) = \frac{u_T(1,r,\,p)}{q} = \frac{a_1}{ap^2}\left\{\left[1 - \frac{J_0(\sqrt{ap}.r)}{J_0(\sqrt{ap})}e^{-A(p)}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{b_1 p}{A(p)}.\frac{J_0(\sqrt{ap}.r)}{J_0(\sqrt{ap})}\left[1 - .e^{-A(p)}\right]\right\}.$$

Здесь $e^{-A(p)} = e^{-b_3} . e^{-b_1 p} . e^{-b_0 p^2} + e^{\frac{b_4}{dp+1}} . e^{-\frac{b_2 k \sqrt{ap} J_1(\sqrt{ap})}{\alpha \ell \; J_0(\sqrt{ap})}}$; e^{-b_3} – коэффициент усиления системы; $e^{-b_1 p}$ – передаточное запаздывание; $e^{-b_0 p^2}$ – коэффициент затухания, зависящий от частоты. Наличие этого звена обусловлено учетом релаксации $(b_0 \neq 0)$. Экспоненциальный множитель $e^{-b_0 p^2}$ обеспечивает рост модуля частотной характеристики с увеличением частоты. Учет релаксации или ее отсутствие существенно влияет на устойчивость системы. Это звено следует учитывать, когда $ks\ell / w^2 >> cm$; в этом случае подвод тепла за счет релаксации значительно влияет на поле температур. Структурная схема, соответствующая уравнению (5) при x =1 показана на рисунке 3.

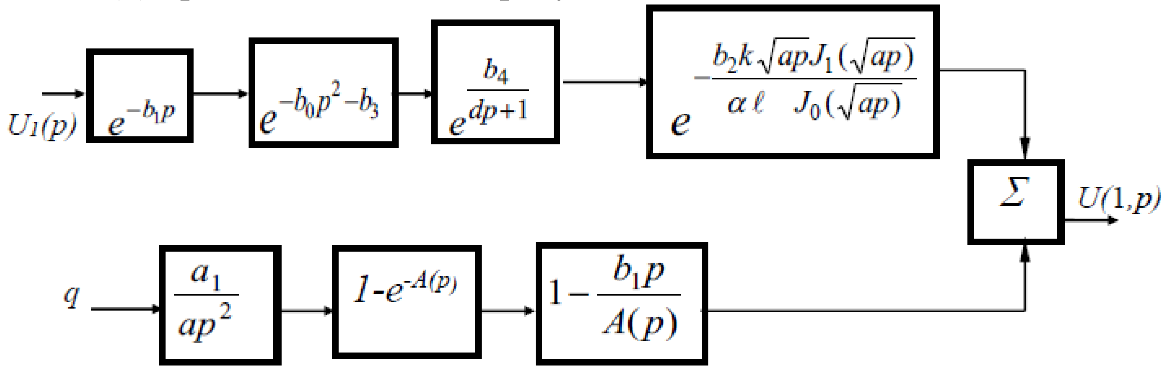

Рис. 3. Структурная схема динамической модели

Для синтеза ряда трансцендентных функций можно выполнить преобразования с целью замены их дробно-рациональными (аппроксимация Падэ).

Список литературы

1. Нелепин Р.А. Автоматическое управление судовыми энергетическими установками. – Л.: Судостроение, 1986. – 296 с.
2. Шевяков А.А., Яковлева Р.М. Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов. – М. Машиностроение, 1985. – 184с.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384с.

Сведения об авторах:

Конева Светлана Андреевна – к.т.н., доцент, заведующая кафедрой «Судовое электрооборудование», СевГУ, г.Севастополь;

Цалоев Владимир Муратович – доцент кафедры «Судовое электрооборудование», СевГУ, г.Севастополь.