

## ВОЗМОЖНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПО ДВУМ КООРДИНАТАМ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА

*Елисеев А.В., Николаев А.В., Елисеев С.В.*

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск*

**Ключевые слова:** механические колебательные системы, передаточные функции, динамическое гашение колебаний, связность внешних возмущений, режимы одновременного динамического гашения по двум координатам.

**Аннотация.** Развивается методологическая основа структурного математического моделирования в приложении к задачам динамики технических объектов, расчетные схемы которых могут быть представлены в виде механических колебательных системы с сосредоточенными параметрами. Рассматриваются особенности динамических свойств колебательных систем при одновременном действии нескольких связанных между собой функционально внешних гармонических возмущений. Исследуются специфические динамические режимы, проявляющиеся как динамическое гашение колебаний по двум координатам. Предлагается технология построения математических моделей, определения передаточных функций системы, построение квадратичных параметрических уравнений, используемых для выбора настройки системы в реализации предлагаемого решения. Исследование динамических свойств системы приводится на механических колебательных системах двух типов: объект совершает плоские колебания и система представлена в виде механической цепи. Используется операторная форма записи уравнений, основанная на интегральных преобразованиях Лапласа. Результаты исследований представляют интерес для специалистов в области вибрационной защиты и виброизоляции машин, приборов и аппаратуры при работе объектов в условиях интенсивных вибрационных нагружениях.

## THE POSSIBILITY OF DYNAMIC DAMPING OF OSCILLATIONS IN TWO COORDINATES OF THE OBJECT STATE

*Eliseev A.V., Nikolaev A.V., Eliseev S.V.*

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk*

**Keywords:** mechanical oscillatory systems, transfer functions, dynamic damping of oscillations, connectivity of external disturbances, modes of simultaneous dynamic damping in two coordinates.

**Abstract.** The methodological basis of structural mathematical modeling in the application to the problems of dynamics of technical objects, the design schemes of which can be presented in the form of mechanical oscillatory systems with concentrated parameters is developed. Features of dynamic properties of vibrational systems at simultaneous action of several functionally connected external harmonic excitations are considered. Specific dynamic modes, which are shown as dynamic damping of oscillations in two coordinates, are investigated. The technology of construction of mathematical models, definition of transfer functions of system, construction of the quadratic parametric equations used for a choice of adjustment of system in realization of the offered decision is offered. The study of the dynamic properties of the system is carried out on mechanical oscillatory systems of two types: the object makes plane oscillations and the system is represented in the form of a mechanical chain. The operator form of equations recording based on Laplace integral transformations is used. The results of the research are of interest to specialists in the field of vibration protection and vibration isolation of machines, devices and equipment when operating objects under intense vibration loads.

**Введение.** Вопросам снижения уровня вибраций элементов машин, работающих в условиях интенсивного динамического нагружения, уделяется большое внимание, что нашло отражение в работах отечественных авторов [1-5].

В качестве расчетных схем объектов транспортного и технологического назначения широко используются расчетные схемы в виде механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами, совершающими малые колебания относительно положения статического равновесия или установившегося динамического состояния. Предполагается, что система обладает линейными свойствами, а внешние воздействия приводятся к гармоническим функциям.

В предлагаемой работе рассматриваются особенности динамических состояний при одновременном действии на технический объект нескольких возмущений.

**I. Некоторые общие положения.** Рассматривается технический объект, расчетная схема которого может быть представлена твердым телом с массой  $M$  и моментом инерции  $J$ , установленным на опорных поверхностях с помощью упругих элементов с коэффициентами жесткости  $k_1, k_2$  как показано на рис. 1. По концам твердого тела в т.А и т.В. приложены гармонические синфазные возмущения одной частоты  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$ . Твердое тело, совершает плоское движение в координатах  $y_0, \varphi$  или  $y_1, y_2$ . Между системами координат имеются соотношения:  $y_0 = ay_1 - by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 - l_1\varphi, y_2 = y_0 + l_2\varphi$ , где  $a = l_2/(l_1 + l_2), b = l_1/(l_1 + l_2), c = 1/(l_1 + l_2)$ ;  $l_1, l_2$  – расстояния от центра тяжести до т.т. (А) и (В) соответственно.

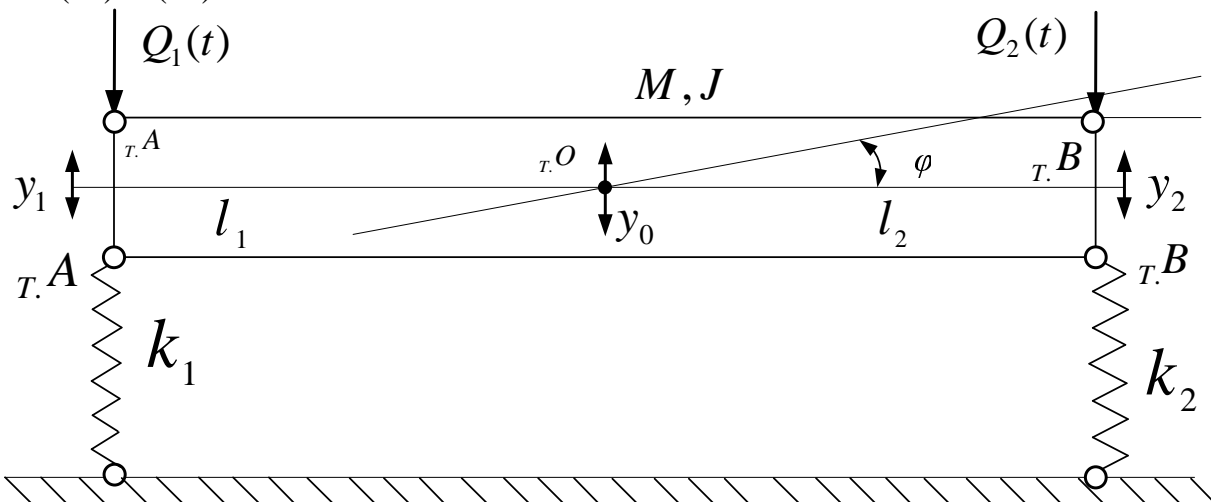


Рис. 1. Расчетная схема технического объекта с двумя степенями свободы, массой  $M$  и моментом инерции  $J$

Если воспользоваться технологией построения математической модели в рамках структурных представлений [6-7], то для технического объекта на рис.1 система уравнений в операторной форме принимает вид:

$$\bar{y}_1[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] - \bar{y}_2(Jc^2 - Mab) = \bar{Q}_1, \quad (1)$$

$$\bar{y}_2[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - \bar{y}_1(Jc^2 - Mab) = \bar{Q}_2, \quad (2)$$

где  $p = j\omega$  - ( $j = \sqrt{-1}$ ) комплексная переменная; значок <-> над переменной означает её изображение по Лапласу.

Используя (1),(2) построим структурную математическую модель исходной системы по рис.1 в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом

отношении системы автоматического управления. Структурная схема представлена на рис.2.

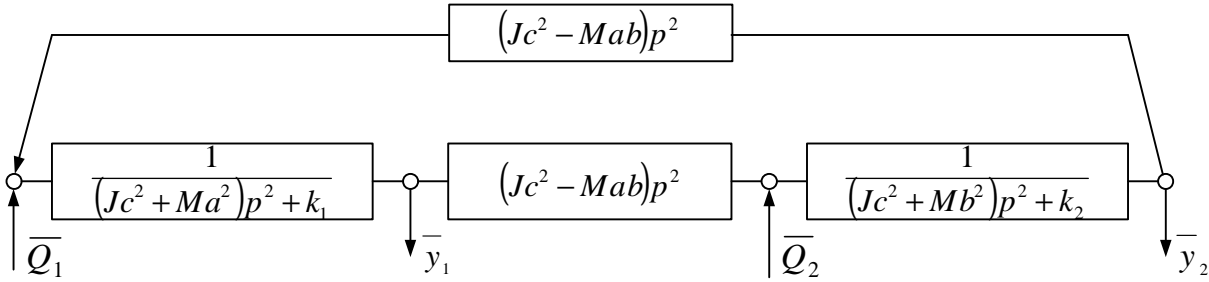


Рис. 2. Структурная математическая модель (структурная схема) исходной системы по рис.1

Структурная схема состоит из двух парциальных блоков, соединенных между собой через инерционную связь. Полагаем, что внешние воздействия  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  являются синфазными одночастотными гармоническими функциями, в которых  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  имеют функциональную связь, определяемую соотношением:

$$\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}_1 \tag{3}$$

где  $\alpha$  - рассматривается как коэффициент связности двух функций;  $\alpha$  является постоянной величиной способной принимать нулевые, отрицательные и положительные значения.

**II. Оценки динамических состояний системы.** Передаточные функции системы с учетом соотношения (3) могут быть построены с использованием структурной схемы системы (рис.2), что дает следующие выражения:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + \alpha(Jc^2 - Mab)p^2}{A(p)}, \tag{4}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{\alpha[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1] + (Jc^2 - Mab)p^2}{A(p)}. \tag{5}$$

где  $A(p)$  является частотным характеристическим многочленом

$$A(p) = ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1) \cdot ((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - (Jc^2 - Mab)^2 p^4. \tag{6}$$

Режимы динамического гашения колебаний в системах с несколькими степенями свободы обычно, если действует один возмущающий фактор (в этом случае  $\alpha = 0$ ), то частота динамического гашения колебаний определяется из частотного уравнения, полученного путем «обнуления» числителя дробно-рационального выражения передаточной функции системы.

При  $\alpha = 0$  ( $\bar{Q}_1 \neq 0, \bar{Q}_2 = 0$ ), то есть при действии одиночного возмущения динамический режим гашения колебаний по координате  $\bar{y}_1$  определяется выражением:

$$\omega_{1,dyn}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}. \tag{7}$$

Что касается координаты  $\bar{y}_2$ , то при условии  $\bar{Q}_1 \neq 0, \bar{Q}_2 = 0$  динамическое гашение колебаний не реализуется. Отметим, что в данном случае, если

рассматривается режим динамического гашения, то частота, на которой он проявляется, совпадает с парциальной частотой блока  $[Mb^2, Jc^2, k_2]$ .

**III. Особенности динамических свойств системы при одновременном действии двух силовых факторов.** При выполнении условий  $\bar{Q}_1 \neq 0, \bar{Q}_2 \neq 0$  ( $\alpha \neq 0$ ) в системе возможна реализация двух режимов динамического гашения колебаний – по координате  $\bar{y}_1$  и координате  $\bar{y}_2$ . Частоты режимов определяются из частотных уравнений, получаемых путем «обнуления» числителей дробно-рациональных выражений (4),(5) передаточных функций системы:

$$\omega_{10,dyn}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2 + \alpha(Jc^2 - Mab)} = \frac{k_2}{Mb(b - \alpha a) + (1 + \alpha)Jc^2}, \quad (8)$$

$$\omega_{20,dyn}^2 = \frac{\alpha k_1}{\alpha(Ma^2 + Jc^2) + (Jc^2 - Mab)} = \frac{k_1 \alpha}{Ma(\alpha a - b) + (1 + \alpha)Jc^2}. \quad (9)$$

Выражения (8),(9) как показано ранее уже не совпадают с выражениями, получаемыми их передаточных функций парциальных систем.

Найдем значение  $\alpha$ , при которых  $\omega_{1,dyn}^2$  будет равно  $\omega_{2,dyn}^2$ , что соответствует режиму динамического гашения колебаний по двум координатам  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_2$  одновременно.

Если принять, что  $\omega_{10,dyn}^2 = \omega_{20,dyn}^2$ , то можно получить квадратичное уравнение относительно  $\alpha$ . В данном случае мы имеем:

$$\frac{k_2}{Mb(b - \alpha a) + (1 + \alpha)Jc^2} = \frac{k_1 \alpha}{Ma(\alpha a - b) + (1 + \alpha)Jc^2}. \quad (10)$$

Откуда можно найти, что

$$k_1(Jc^2 - Mba)\alpha^2 + [k_1(Jc^2 + Mb^2) - k_2(Jc^2 + Ma^2)]\alpha - k_2(Jc^2 - Mab) = 0 \quad (11)$$

или

$$\alpha^2 + \frac{[k_1(Jc^2 + Mb^2) - k_2(Jc^2 + Ma^2)]}{k_1(Jc^2 - Mba)}\alpha - \frac{k_2}{k_1} = 0. \quad (12)$$

Если  $k_2 = k_1$ , то

$$\alpha^2 + \frac{M(b^2 - a^2)}{Jc^2 - Mba}\alpha - 1 = 0, \quad (13)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{M(a^2 - b^2)}{Jc^2 - Mba} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{M(a^2 - b^2)}{Jc^2 - Mba}\right)^2 + 1}. \quad (14)$$

Реализация режима динамического гашения колебаний по двум координатам имеет свои особенности, определяемые параметрами квадратного уравнения относительно коэффициента связности  $\alpha$ . Один из корней частотного уравнения (14) положительный, другой отрицательный.

Физический смысл соотношения действующих сил в данном случае может рассматриваться как своеобразная форма ёвзаимного уравновешивания действующих внешних возмущений. Рассматриваемые эффекты могут оказаться полезными в задачах динамики машин, связанных с уравновешиванием объекта, его стабилизацией при действии нескольких возмущений и др.

#### IV. Особенности динамических свойств систем цепного типа.

Рассматривается расчетная схема технического объекта, представленная как механическая колебательная система с двумя степенями свободы цепного типа (рис.3).

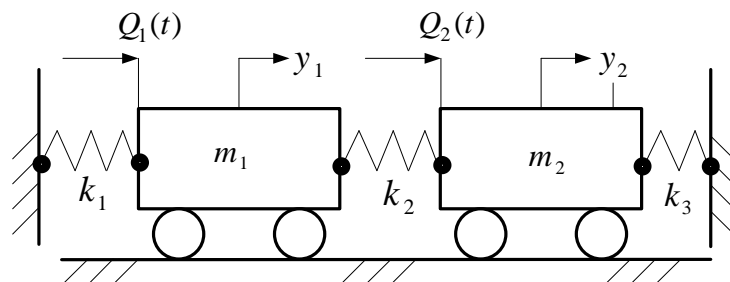


Рис. 3. Расчетная схема технического объекта цепного типа структуры с двумя степенями свободы при одновременном действии двух внешних возмущений

Система состоит из двух инерционных элементов с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенными между собой упругими элементами с коэффициентами жесткости  $k_1, k_2, k_3$ , обладает линейными свойствами и совершает малые колебания относительно положения статического равновесия.

Система уравнений движения в координатах  $y_1, y_2$  в операторной форме имеет вид:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1, \quad (15)$$

$$(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 = \bar{Q}_2. \quad (16)$$

На рис.4 приведена структурная схема или структурная математическая модель исходной системы по рис.3.

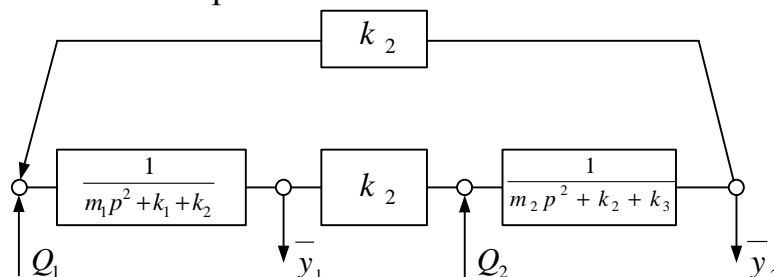


Рис. 4. Структурная схема (структурная математическая модель) технического объекта по расчетной схеме на рис.3

Рассматриваемая математическая колебательная система состоит из двух парциальных блоков, соединенных между собой упругой связью. Передаточные функции системы имеют вид (при одновременном действии двух внешних возмущений):

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \alpha k_2}{A(p)}, \quad (17)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{\alpha(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2}{A(p)}. \quad (18)$$

где  $A(p) = (m_2 p^2 + k_2 + k_3)(m_1 p^2 + k_1 + k_2) - k_2^2$  является частотным характеристическим многочленом. (19)

Частоты динамического гашения колебаний в данном случае определяются выражениями:

$$\omega_{10,dyn}^2 = \frac{k_3 + k_2(1 + \alpha)}{m_2}, \quad (20)$$

$$\omega_{20,dyn}^2 = \frac{\alpha(k_1 + k_2) + k_2}{\alpha m_1}. \quad (21)$$

Используя (20),(21) составим уравнение относительно  $\alpha$ , при котором одновременно реализуется режим динамического гашения колебаний по координатам  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\alpha m_1 [k_3 + k_2(1 + \alpha)] = m_2 [\alpha(k_1 + k_2) + k_2], \quad (22)$$

или 
$$\alpha^2 + \left[ \frac{k_3 + k_2}{k_2} - \frac{m_2}{m_1} \frac{k_1 + k_2}{k_2} \right] \alpha - \frac{m_2}{m_1} = 0. \quad (23)$$

Из уравнения (23) можно определить корни, один из которых будет положительный, а второй – отрицательный.

В частности, если  $k_3 = k_2 = k_1 = k$ , то соответствующее квадратное уравнение (23) принимает вид

$$\alpha^2 + 2\left[1 - \frac{m_2}{m_1}\right]\alpha - \frac{m_2}{m_1} = 0. \quad (24)$$

Корни квадратного уравнения (24):

$$\alpha_{1,2} = -\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}}. \quad (25)$$

Если  $m_2 = m_1 = m$ , то  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ . Частоты динамического гашения (20),(21) при  $\alpha_1 = 1$  принимают одинаковые значения  $\omega_{I,dyn}^2$ :

$$\omega_{I,dyn}^2 = \omega_{10,dyn}^2 = \frac{3k}{m}, \quad (26)$$

$$\omega_{I,dyn}^2 = \omega_{20,dyn}^2 = \frac{3k}{m}. \quad (27)$$

Соответственно, частоты динамического гашения (20),(21) при  $\alpha_2 = -1$  принимают значения:

$$\omega_{II,dyn}^2 = \omega_{10,dyn}^2 = \frac{k}{m}, \quad (28)$$

$$\omega_{II,dyn}^2 = \omega_{20,dyn}^2 = \frac{k}{m}. \quad (29)$$

Вместе с тем, характеристическое уравнение системы (19) принимает вид:

$$A(\omega) = A(p)|_{p=j\omega} = m^2 \omega^4 - 4km \omega^2 + 3k^2 = 0. \quad (30)$$

Собственные частоты находятся их уравнения (30) и составляют:

$$\omega_{1,nat}^2 = \frac{3k}{m}, \quad (31)$$

$$\omega_{2,nat}^2 = \frac{k}{m}. \quad (32)$$

Если внешние воздействия имеют коэффициент связности  $\alpha_1 = 1$  и частота внешнего воздействия совпадает с частотой гашения колебаний  $\omega_{I,dyn}^2 = \omega_{1,nat}^2$ , то уравнения системы (15),(16) принимают вид:

$$-k\bar{y}_1 - k\bar{y}_2 = \bar{Q}_1; \tag{33}$$

$$-k\bar{y}_2 - k_2\bar{y}_1 = \bar{Q}_1. \tag{34}$$

Вместе с тем, передаточные функции (15),(16) будут иметь следующие предельные значения:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} W_1(p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} \frac{mp^2 + 2k + \alpha k}{A(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow j\omega_{I,dyn}} \frac{m(p^2 + \frac{3k}{m})}{m^2(p^2 + \frac{3k}{m})(p^2 + \frac{k}{m})} = -\frac{1}{2k}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} W_2(p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{I,dyn} \\ \alpha \rightarrow 1}} \frac{\alpha(mp^2 + 2k) + k}{A(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow j\omega_{I,dyn}} \frac{mp^2 + 3k}{m^2(p^2 + \frac{3k}{m})(p^2 + \frac{k}{m})} = -\frac{1}{2k}. \end{aligned} \tag{36}$$

Если частота внешнего воздействия составляет  $\omega_{II,dyn}^2 = \omega_{2,nat}^2$ , а коэффициент связности  $\alpha_2 = -1$ , то система (15),(16) примет вид:

$$k\bar{y}_1 - k\bar{y}_2 = \bar{Q}_1; \tag{37}$$

$$k\bar{y}_2 - k\bar{y}_1 = -\bar{Q}_1; \tag{38}$$

Вместе с тем, передаточные функции (17),(18) при условии, что  $\omega \rightarrow \omega_{II,dyn}$  и  $\alpha \rightarrow \alpha_2 = -1$  имеют следующие предельные значения:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} W_1(p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} \frac{mp^2 + 2k + \alpha k}{A(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow j\omega_{II,dyn}} \frac{m(p^2 + \frac{k}{m})}{m^2(p^2 + \frac{3k}{m})(p^2 + \frac{k}{m})} = \frac{1}{2k}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} W_2(p) &= \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \lim_{\substack{p \rightarrow j\omega_{II,dyn} \\ \alpha \rightarrow \alpha_2 = -1}} \frac{\alpha(mp^2 + 2k) + k}{A(p)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow j\omega_{2,nat}} \frac{-mp^2 - k}{m^2(p^2 + \frac{3k}{m})(p^2 + \frac{k}{m})} = -\frac{1}{2k}. \end{aligned} \tag{40}$$

Значение  $\alpha$  как некоторого настроечного параметра для реализации режима динамического гашения по двум координатам существенно зависит от параметров системы. В физическом смысле, как уже ранее упоминалась, рассматриваемый режим отражает возможности формирования условия равновесия сил, прикладываемых к элементам системы, которые обеспечивают её равновесие.

**Заключение.** В линейных механических системах одновременное действие нескольких возмущений обычно рассматривается с учетом возможностей суперпозиции движений по выбираемым координатам.

Особенности взаимодействия элементов системы в форме режимов одновременного динамического гашения колебаний по нескольким координатам, в частности, по двум, характерно только для синфазных и одночастотных внешних гармонических воздействиях. Условия реализации таких режимов определяется аналитически из решения частотного квадратичного уравнения относительно коэффициента связности внешних воздействий.

Предварительные исследования позволяют сделать вывод о возможности реализации режима одновременного динамического гашения по двум координатам состояния объекта, что обеспечивается вариацией выбора значений настраиваемой механической колебательной системы.

#### Список литературы

1. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
2. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 2014. – 357с.
3. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
4. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. – Springer International Publishing, Switzerland, 2016. – 708 p.
5. Eliseev S.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev // Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
6. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. – Новосибирск: Наука, 2016. – 459с.
7. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.

#### Сведения об авторах:

*Елисеев Андрей Владимирович* – к.т.н., доцент кафедры математики, ИрГУПС, г.Иркутск;

*Николаев Андрей Владимирович* – аспирант, ИрГУПС, г.Иркутск;

*Елисеев Сергей Викторович* – д.т.н., профессор, советник при ректорате по научной работе, ИрГУПС, г.Иркутск.