

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ В ВИДЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБОЙ, ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Мирошников В.Ю.

*Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
г. Харьков*

Ключевые слова: толстостенная труба в слое, композит, условия сопряжения, обобщенный метод Фурье.

Аннотация. Решена пространственная задача теории упругости для упругой среды в виде полупространства, жестко сцепленного со слоем, в котором имеется продольная толстостенная круговая цилиндрическая труба. Слой, полупространство и труба – однородные изотропные материалы отличные друг от друга.

На свободной поверхности слоя и внутренней поверхности трубы заданы напряжения. На границе слоя и полупространства, а также на границе слоя и внешней поверхности трубы заданы условия сопряжения. Необходимо провести анализ напряженного состояния заданной композитной среды.

На основе обобщенного метода Фурье получено решение пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах, связанных с трубой и декартовых координатах, связанных со слоем и полупространством. Удовлетворяя граничным условиям и условиям сопряжения, получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, которые решены методом редукции. В результате получены перемещения и напряжения в различных точках слоя, полупространства и трубы.

INVESTIGATION OF THE STRESS STATE OF AN ELASTIC MEDIUM IN THE FORM OF A HALF-SPACE AND A LAYER WITH A CYLINDRICAL PIPE, AT STRESSES SPECIFIED ON BOUNDARY SURFACES

Miroshnikov V.Yu.

Kharkov National University of Construction and Architecture, Kharkov

Keywords: thick-walled pipe in a layer, composite, conjugation conditions, generalized Fourier method.

Abstract. The spatial problem of the theory of elasticity for an elastic medium in the form of a half-space rigidly adhered to a layer in which there is a longitudinal thick-walled circular cylindrical pipe is solved. Layer, half-space and pipe - homogeneous isotropic materials are distinct from each other. The stresses are set on the free surface of the layer and the inner surface of the pipe. At the boundary of the layer and half-space, as well as at the boundary of the layer and the outer surface of the pipe, the matching conditions are specified. It is necessary to analyze the stress state of a given composite medium.

Based on the generalized Fourier method, the spatial problem of the theory of elasticity is obtained in cylindrical coordinates associated with the pipe and Cartesian coordinates associated with the layer and half-space. Satisfying the boundary and conjugation conditions, we obtain infinite systems of linear algebraic equations that are solved by the reduction method. As a result, displacements and stresses were obtained at various points of the layer, half-space, and pipe.

Введение

При проектировании композитной среды необходимо знать напряженное состояние в каждом ее элементе и на границе сопряжения этих элементов.

Наиболее точными методами расчета напряженного состояния являются аналитические или численно-аналитические методы.

Одним из численно-аналитических методов является обобщенный метод Фурье. На основе этого решены стационарные задачи дифракции упругих волн в слое с цилиндрической полостью [1-3].

В работе [4] обобщенный метод Фурье был дополнен теоремами сложения базисных решений, что дало возможность решать задачи для пространственного тела с несколькими граничными поверхностями (более трех).

На основе этого метода решены задачи для пространства с цилиндрическими полостями и различными краевыми условиями [5], полупространства с цилиндрической полостью или включением [6-11], для цилиндра с цилиндрическими полостями или включениями [12], для слоя с цилиндрической полостью, включением или трубой [13-16].

Постановка задачи

В упругом однородном слое имеется продольная цилиндрическая бесконечная труба, наружным радиусом R_1 , внутренним – R_2 . Расстояние от центра трубы до верхней границы слоя h , до нижней границы – \tilde{h} . Слой нижней границей жестко связан с упругим однородным полупространством.

Трубу будем рассматривать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) , слой и полупространство в декартовой системе координат (x, y, z) , которая одинаково ориентирована и совмещена с системой координат трубы.

Необходимо найти решение уравнения Ламе $\Delta \vec{U}_j + (1 - 2\sigma_j)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{U}_j = 0$, где σ_j – коэффициент Пуассона слоя ($j=1$), полупространства ($j=2$) или трубы ($j=3$).

На верхней границе слоя заданы напряжения $F_1 \vec{U}_1(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$, на внутренней поверхности трубы напряжения $F_3 \vec{U}_3(\varphi, z)|_{\rho=R_2} = \vec{F}_R^0(\varphi, z)$, где \vec{U}_1 – перемещения в слое; \vec{U}_3 – перемещения в трубе;

$$F_j \vec{U}_j|_j = 2G_j \left[\frac{\sigma_j}{1 - 2\sigma_j} \vec{n} \operatorname{div} \vec{U}_j + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U}_j + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{U}_j) \right]; \quad G_j = \frac{E_j}{2(1 + \sigma_j)}; \quad E_j - \text{модуль}$$

упругости слоя ($j=1$), полупространства ($j=2$) или трубы ($j=3$);

$$\begin{aligned} \vec{U}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{F}_R^0(\varphi, z) &= \sigma_\rho^{(p)} \vec{e}_1^{(2)} + \tau_{\rho\varphi}^{(p)} \vec{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(p)} \vec{e}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (1)$$

известные функции; $\vec{e}_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$ – орты декартовой ($k=1$) и цилиндрической ($k=2$) систем координат.

На границе слоя и полупространства заданы условия сопряжения

$$\vec{U}_1|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_2|_{y=-\tilde{h}}, \quad (2)$$

$$F_1 \vec{U}_1|_{y=-\tilde{h}} = F_2 \vec{U}_2|_{y=-\tilde{h}}, \quad (3)$$

на границе слоя и трубы заданы условия сопряжения

$$\vec{U}_1(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = \vec{U}_3(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (4)$$

$$F_1 \vec{U}_1(\varphi, z)|_{\rho=R_1} = F_3 \vec{U}_3(\varphi, z)|_{\rho=R_1}, \quad (5)$$

где \vec{U}_2 — перемещения в полупространстве.

Заданные функции будем считать быстро убывающими от начала координат по оси z для трубы и по оси z и x для границ слоя.

Решение задачи

Базисные решения уравнения Ламе примем в виде [4]

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}, \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\varphi)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\varphi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

где $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$, $k=1, 2, 3$ – соответственно внутренние и внешние решения уравнения Ламе для цилиндра; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – решения уравнения Ламе для слоя и полупространства.

Решение задачи представим в виде

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1-\infty}^3 \int \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda; \sigma_1) d\lambda + \quad (7)$$

$$+ \sum_{k=1-\infty}^3 \int \int (H_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma_1) + \tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma_1)) d\mu d\lambda,$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1-\infty}^3 \int \int (H_k^{(2)}(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu; \sigma_2)) d\mu d\lambda, \quad (8)$$

$$\vec{U}_3 = \sum_{k=1-\infty}^3 \int \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) d\lambda, \quad (9)$$

где $\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ и $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисные решения, заданные формулами (6), а неизвестные функции $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}(\lambda)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$, $A_{k,m}(\lambda)$ и $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$ необходимо найти из граничных условий (1) и условий сопряжения (2 – 5).

Для перехода в базисных решениях между системами координат воспользуемся формулами [15].

Для выполнения граничных условий на верхней границе слоя, найдем напряжения для (7), и, при $y=h$, приравняем заданному $\vec{F}_h^0(x, z)$, представленному через двойной интеграл Фурье. Так получим три уравнения (по одному на каждую проекцию) с девятью неизвестными $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ и $B_{k,m}(\lambda)$.

Для выполнения условий сопряжения на границе слоя и полупространства в перемещениях, подставляем в (2), при $y=-\tilde{h}$, правые части (7) и (8). При этом, записывая выражение $\vec{U}_2(x, z)|_{y=-\tilde{h}}$, необходимо воспользоваться формулами перехода от решений $\vec{S}_{k,m}$ цилиндра к решениям $\vec{u}_k^{(-)}$ [15, формула (7)]. Подобным образом можем записать три дополнительных уравнения для напряжений (3).

Так получим девять бесконечных систем уравнений с неизвестными функциями $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ и $B_{k,m}(\lambda)$.

Определитель Δ этой системы имеет вид $\Delta = -16 \cdot \gamma^6 \cdot e^{-3\gamma(h-\tilde{h})} \cdot \Phi(\gamma) / \lambda^6$, где $\Phi(\gamma)$ – функция, при $\gamma > 0$, имеет только положительные значения и не обращается в ноль, из этого следует, что эта система уравнений имеет единственное решение.

Выразим $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ и $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для выполнения условий сопряжения на границе слоя и трубы, разложим в (7) базисные решения $\vec{u}_k^{(+)}$ и $\vec{u}_k^{(-)}$ по решениям $\vec{R}_{k,m}$, используя формулы перехода [15, формула (8)]. Полученный вектор, а также (9), при $\rho=R_1$, подставим в (4). Так получим три бесконечных системы уравнений для сопряжения слоя и трубы в перемещениях. Подобным образом запишем три уравнения для напряжений (5).

Для выполнения граничных условий на внутренней поверхности трубы, найдем напряжения для (9) и приравняем, при $\rho=R_2$, заданному $\vec{F}_R^0(\varphi, z)$, представленному интегралом и рядом Фурье.

Получив 9 бесконечных уравнений, вместо $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ и $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ подставим ранее выраженные функции через $B_{k,m}(\lambda)$, освободимся от рядов по m и интегралов по λ . В результате получим совокупность девяти бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $B_{k,m}(\lambda)$, $A_{k,m}(\lambda)$ и $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$. Эти бесконечные системы имеют свойства уравнений второго рода и, как следствие, к ним можно применять метод редукции.

Решив эту систему уравнений, найдем неизвестные $A_{k,m}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}(\lambda)$ и $B_{k,m}(\lambda)$.

Найденные из бесконечной системы уравнений $B_{k,m}(\lambda)$ подставим в выражения для $H_k^{(1)}(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k^{(1)}(\lambda, \mu)$ и $H_k^{(2)}(\lambda, \mu)$. Так будут определены все неизвестные задачи.

Численные исследования напряженного состояния

Материал слоя – бетон, коэффициент Пуассона $\sigma_1 = 0,16$, модуль упругости $E_1 = 3,25 \cdot 10^4$ МПа. Полупространство – щебень и гравий, укрепленные цементом, коэффициент Пуассона $\sigma_2 = 0,25$, модуль упругости $E_2 = 900$ МПа. Труба – сталь, коэффициент Пуассона $\sigma_3 = 0,25$, модуль упругости $E_3 = 2 \cdot 10^5$ МПа. Наружный радиус трубы $R_1 = 25$ мм., внутренний $R_2 = 20$ мм. Расстояние от центра трубы к верхней границы слоя $h = 40$ мм., к нижней границе слоя $\tilde{h} = 60$ мм.

На внутренней поверхности трубы заданы напряжения

$$\tau_{\rho z}^{(p)}(z) = \begin{cases} |z| \geq a + c, & \tau_{\rho z}^{(p)}(z) = 0 \\ a \leq |z| \leq a + c & \tau_{\rho z}^{(p)}(z) = \frac{a + c - |z|}{c}, a = 20, c = 1; \sigma_{\rho}^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(p)} = 0. \\ |z| \leq a & \tau_{\rho z}^{(p)}(z) = 1 \end{cases}$$

Верхняя поверхность слоя свободна от напряжений $\sigma_y^{(h)} = \tau_{xy}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$.

Бесконечная система была срезана до $m = 8$. Вычисление интегралов выполнено квадратурными формулами Филона (для колеблющихся функций) и Симпсона (для функций без колебаний). Точность выполнения граничных условий при указанных значениях геометрических параметров 10^{-3} для значений, которые должны быть равны нулю, или 0,1% для значений отличных от нуля.

На рис.1. представлено напряженное состояние в области сопряжения трубы и слоя при $z=0$, в МПа.

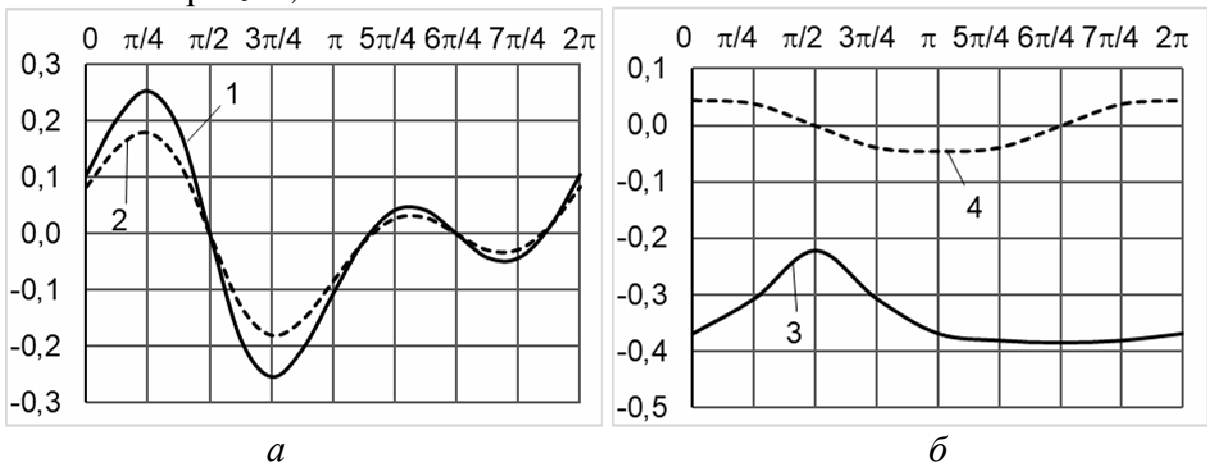


Рис. 1. Напряженное состояние в цилиндрических координатах:

a – напряжение $\tau_{\phi z}$ в теле трубы; b – в теле слоя, при $\rho = R_1$;

1 – при $\rho = R_2$; 2 – при $\rho = R_1$; 3 – $\tau_{\rho z}$; 4 – $\tau_{\phi z}$

При заданных на внутренней поверхности трубы ненулевых касательных напряжениях $\tau_{\rho z}$, на этой поверхности возникают только напряжения $\tau_{\phi z}$ (рис.1а, линия 1). Наибольшие значения напряжений $\tau_{\phi z}$ расположены при $\phi = \pi/4$ и $\phi = 3\pi/4$, то есть в верхней части трубы. Отсюда следует, что напряжения растут на той стороне, где есть свободное пространство.

На внешней поверхности трубы (рис.1а, линия 2) напряжения $\tau_{\phi z}$ снижаются.

На поверхности сопряжения, в теле слоя напряжения $\tau_{\varphi z}$ (рис.1б, линия 3) значительно снизились, как и напряжения $\tau_{\rho z}$ (рис.1б, линия 4), которые на внутренней поверхности трубы равны 1.

На верхней границе слоя (рис.2а) вдоль оси z возникают только нормальные напряжения σ_x и σ_z .

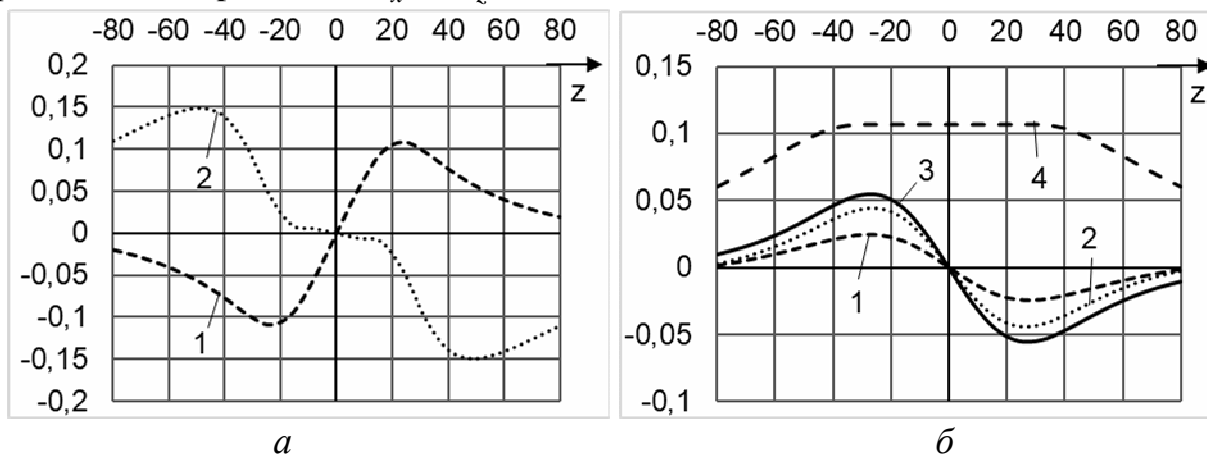


Рис. 2. Напряжения в слое вдоль оси z , в МПа: a – на верхней границе слоя, при $x=0$; b – на нижней границе слоя, при $x=0$; 1 – σ_x ; 2 – σ_z ; 3 – σ_y ; 4 – $\tau_{\rho z}$

На нижней границе слоя (рис.2б), вследствие жесткого сцепления с полупространством, кроме нормальных напряжений σ_x и σ_z , возникают напряжения σ_y (рис.2б, линия 3) и $\tau_{\rho z}$ (рис.2б, линия 4), которые выходят за границы расположения нагрузки ($a=20\text{мм}$).

На верхней границе слоя вдоль оси x возникают только напряжения τ_{xz} (рис. 3а).

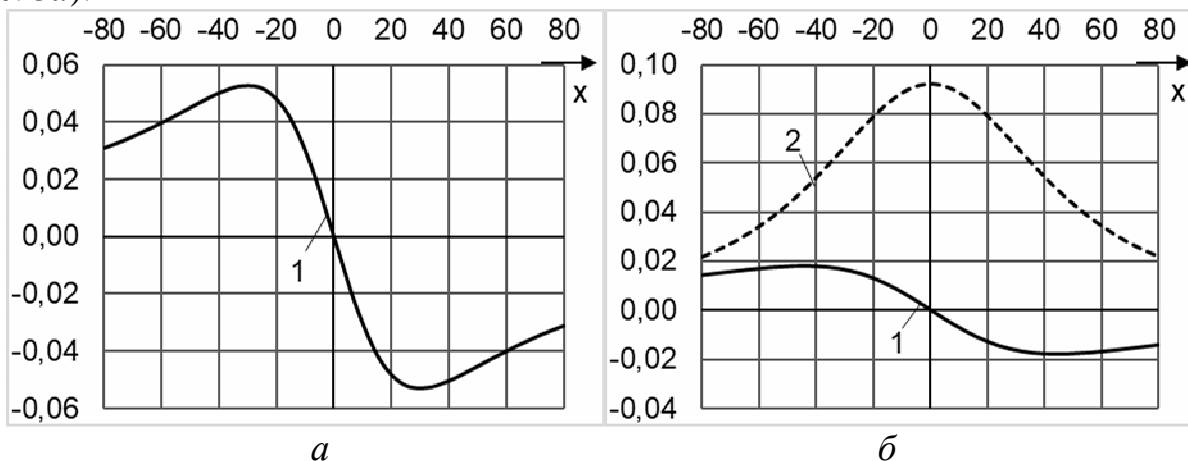


Рис. 3. Напряжения вдоль оси x , в МПа: a – на верхней границе слоя; b – на нижней границе слоя; 1 – τ_{xz} ; 2 – τ_{yz}

На нижней границе слоя напряжения τ_{xz} ниже, в следствии большего расстояния от трубы до нижней границы, однако вдоль оси x возникают остаточные напряжения τ_{yz} (рис.2б, линия 2).

Выводы

Решена трехмерная задача теории упругости для многослойной среды, состоящей из слоя, полупространства и толстостенной трубы, которые связаны между собой условиями сопряжения. На свободной границе слоя и внутренней поверхности трубы заданы напряжения.

Метод решения задачи основан на обобщенном методе Фурье и позволяет с наперед заданной точностью определить напряженно-деформированное состояние исследуемой среды.

Численные исследования проведены для заданных ненулевых продольных касательных напряжений на внутренней поверхности трубы и нулевых на верхней поверхности слоя. Анализ показал, что наиболее опасным участком является сопряжение трубы и слоя.

Дальнейшее исследование актуально для большего числа труб.

Список литературы

1. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К.: Наук. думка, 1978. – 307с.
2. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. Волчков В.В. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями / В.В. Волчков, Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119-133.
4. Николаев А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Х.: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
5. Miroshnikov V.Yu. On Computation of the Stress-Strain State of a Space Weakened by a System of Parallel Circular Cylindrical Cavities with Different Edge Conditions // Science and Practice: A New Level of Integration in the Modern World. 4th Intern. Conf. Proc. Scope Academic House. Sheffield. – 2017. – P. 77-83.
6. Николаев А.Г. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 253-259.
7. Miroshnikov V.Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities [// Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12-18.
8. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / V. Protsenko, V.Yu. Miroshnikov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics. – 2018. – Vol. 4, № 7. – P. 43-50. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>
9. Николаев А.Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением / А.Г. Николаев, А.Ю. Щербакова, А.И. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2006. – Вып. 2(45). – С. 47-51.
10. Проценко В.С. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Украинец // Вісник Запорізького національного університету. –2015. – Вып. 2. – С. 193-202.

11. Проценко В.С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // Доп. НАН України. – 2004. – №12. – С. 52-58.
12. Николаев А. Г. Упругая механика многокомпонентных тел / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. – Харьков: Нац.аэрокосм.ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – 272 с.
13. Miroschnikov V.Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – №102. – P. 77-90. – <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>
14. Miroschnikov V.Yu. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion / V.Yu. Miroschnikov, A.V. Medvedeva, S.V. Oleshkevich // Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – P. 413-420. – <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413>
15. Miroschnikov V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer // Journal of Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 22, №2. – P. 44-52. – <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>
16. Miroschnikov V.Yu. Investigation of the stress state of a multilayer medium consisting of a layer, half-space and a cylindrical pipe, with displacements specified on the boundary surfaces // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2019. – Issue 16. – P. 15-23. – <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2019-16-15-23>

Сведения об авторе:

Мирошников Виталий Юрьевич – к.т.н., доцент, доцент кафедры строительной механики, ХНУСА, г.Харьков.